# 区间数排序方法综述 *

李德清[1,2)]　曾文艺[2)†]　尹　乾[2)]
(1)厦门工学院计算机与人工智能学院，361021，福建厦门；　2)北京师范大学人工智能学院，100875，北京)

**摘要**　区间数排序方法是不确定性决策领域的重要研究内容. 为便于研究者进一步分析和讨论,本文系统总结了目前发表在各类文献中的区间数排序方法,将众多研究者提供的排序方法梳理成 9 类,分析比较了每一类方法的特点、适用情况,对一些有不足的排序方法通过反例给出了说明. 特别是对目前应用最为广泛的基于可能度的区间数排序方法,讨论了各种不同的可能度公式,指出了它们各自的特点,分析了可能度公式的性质,证明了一些公式相互等价. 同时从可能度和保序性 2 个角度,分析了基于可能度矩阵的区间数排序方法的不足,并介绍了一种改进的排序方法.

**关键词**　区间数; 区间数排序; 可能度; 保序性
**中图分类号**　O159　　**DOI:** 10.12202/j.0476-0301.2019155

## 0　引言

区间数是一种描述不确定性信息的有力工具,它最早由 Moore[1−2] 提出,目前已广泛应用于多属性的不确定性决策、模糊控制等领域. 在应用区间数描述不确定性信息的决策过程中,除了要解决对区间数进行合成的问题,还要解决区间数排序的问题[3−4]. 现有的区间数排序方法大致可以分为如下几类: 1)根据某种序关系对区间数进行排序; 2)定义区间数之间的距离或贴近度,然后对一组待排序的区间数引入理想区间数,计算区间数与理想区间数之间的距离和贴近度,根据计算得到的距离或贴近度完成对区间数的排序; 3)利用集对分析理论的联系数给出区间数的排序方法; 4)利用粗糙集理论的上、下近似,给出区间数排序的方法; 5)利用概率分布定义一种排序度量值,根据排序度量值完成对区间数的排序; 6)通过引进刻画区间数大小比较的可能度,根据可能度值的大小对区间数进行排序.

本文系统梳理了常用的区间数排序方法,详细介绍了每一类排序方法的主要思想,分析了每种方法的特点和不足,特别是深入讨论了基于可能度矩阵的区间数排序方法,介绍了 11 个发表在国内外学术期刊的可能度公式,证明了其中 6 个可能度公式等价.同时分析了目前应用最为广泛的、基于可能度矩阵的区间数排序方法的不足,并介绍了一种改进方法.

## 1　区间数的定义和运算

记实数轴上的区间 $a=[a^-,a^+]$, 称 $a$ 为区间数. 若 $a^-\geqslant 0$, 则称 $a$ 为正区间数; 若 $a^-=a^+$, 则 $a$ 退化为普通的实数.

设 $a=[a^-,a^+]$, $b=[b^-,b^+]$为区间数, $\lambda$为实数, 则有如下运算法则:

1) $a+b=[a^-+b^-,a^++b^+]$;

2) $a-b=[a^--b^+,a^+-b^-]$;

3) $a\cdot b=[\min(a^-b^-,a^-b^+,a^+b^-,a^+b^+),\quad \max(a^-b^-,a^-b^+,a^+b^-,a^+b^+)]$;

4) $\dfrac{a}{b}=\left[\min\left(\dfrac{a^-}{b^-},\dfrac{a^-}{b^+},\dfrac{a^+}{b^-},\dfrac{a^+}{b^+}\right),\quad \max\left(\dfrac{a^-}{b^-},\dfrac{a^-}{b^+},\dfrac{a^+}{b^-},\dfrac{a^+}{b^+}\right)\right], 0\notin[b^-,b^+]$;

5) $\lambda a=[\min(\lambda a^-,\lambda a^+),\quad \max(\lambda a^-,\lambda a^+)]$.

* 国家自然科学基金资助项目(61973330, 10971243, 61472043)
† 通信作者: 曾文艺(1966—), 男, 教授, 博士. 研究方向: 模糊信息处理及其应用. e-mail: zengwy@bnu.edu.cn
收稿日期: 2019-06-03

## 2 常用的区间数排序方法

**2.1 确定性排序方法** Moore[2] 给出比较 2 个区间数大小的方法：

$$a \geqslant b \text{ 当且仅当 } a^- \geqslant b^+.$$

显然，此方法当 2 个区间数有交叉重叠时无法进行比较.

曾文艺等[5] 利用区间数中点值给出的排序方法：

$$a \geqslant b \text{ 当且仅当 } \frac{a^- + a^+}{2} \geqslant \frac{b^- + b^+}{2}.$$

显然，这是由区间数的中点值来反映区间数的大小. 一般而言，此排序方法利用的区间数信息较少，因而丢失的信息较多，所以，排序结果不太精确.

**2.2 基于序关系的区间数排序方法** Sengupta 等[6] 先假定$\frac{a^- + a^+}{2} \leqslant \frac{b^- + b^+}{2}$，然后基于区间数的中点值和区间数长度定义了一个判定区间数大小关系的可接受度，其计算式为

$$A(a < b) = \frac{(b^- + b^+) - (a^- + a^+)}{l(b) + l(a)}, \tag{1}$$

式中$l(a) = a^+ - a^-$表示区间数 $a$ 的长度. 基于上述计算结果，可以给出如下比较方法：

若$A(a<b) = 0$，则认为 $a<b$ 是不能接受的，即此时应视为$a \geqslant b$；若$0 < A(a<b) < 1$，则认为 $a<b$ 的可接受度为$A(a<b)$；若$A(a<b) \geqslant 1$，则认为 $a<b$ 绝对成立.

刘进生等[7] 定义了一种比较区间数的度量

$$m_\theta(a) = (1-\theta)a^- + \theta a^+, \tag{2}$$

式中$\theta \in [0,1]$. 然后根据$m_\theta(a)$ 值的大小对区间数进行排序，值越大，则对应的区间数越大. 显然这是一种折衷考虑区间数端点的排序方法，排序结果也与$\theta$的取值有关，$\theta$的取值反映了决策者的主观态度.

进一步，刘进生等指出：考虑到决策时应尽量减少问题的不确定性，因而当$m_\theta(a) = m_\theta(b)$，应优先选择区间长度较短的区间数. 即此时区间长度较短的区间数优于或大于区间长度较大的区间数.

赵慧冬等[8] 对正有界闭区间数定义了一种几何平均排序函数

$$G_\lambda(a) = (a^-)^{1-\lambda}(a^+)^\lambda, \tag{3}$$

式中$\lambda \in [0,1]$.

对任意 2 个正区间数$a = [a^-, a^+]$, $b = [b^-, b^+]$，取定$\lambda \in [0,1]$，借助上述排序函数，赵慧冬等给出了如下排序方法：

1）如果$G_\lambda(a) \leqslant G_\lambda(b)$，则称 $a$ 小于等于 $b$ 或称 $b$ 大于等于 $a$，记作$a \leqslant b$或$b \geqslant a$；

2）如果$G_\lambda(a) = G_\lambda(b)$，则称 $a$ 等于 $b$，记作$a = b$.

这种方法的不足就是排序结果与$\lambda$的取值有关，针对 2 个区间数的比较，当$\lambda$采用不同的数值时，可能会得到相反的排序结果，因而是一种不科学的区间数排序方法.

例 1 设 $a$=[1, 5], $b$=[2, 4]，则当$0 \leqslant \lambda < 0.756$时，有$G_\lambda(a) < G_\lambda(b)$，则认为$a < b$；当$0.756 < \lambda \leqslant 1$时，有$G_\lambda(a) > G_\lambda(b)$，则认为$a < b$；当$\lambda = 0.756$时，有$G_\lambda(a) = G_\lambda(b)$，则认为$a = b$.

樊治平等[9] 考虑决策者对待风险的态度，定义了 2 种区间数的排序值，排序值越大，则对应的区间数排序越靠前.

仇国芳等[10] 将可能度公式推广到偏序集上的包含度，给出了区间数比较的包含度方法，同时给出了借助三角模构造包含度的方法.

张兴芳等[11] 对于给定的一组区间数定义了最大区间数和拟最大区间数，并提供了寻找最大区间数和拟最大区间数的方法. 最大区间数的最大性是绝对可信的，但拟最大区间数的最大性并不是绝对可信的. 于是张兴芳等定义了将拟最大区间数作为最大区间数的可信度，然后根据可信度的大小选择出最大的区间数. 不

过, 孙海龙等[12] 指出, 在比较 2 个区间数时, 计算可信度时没有考虑“拟最大”区间数的下界和另一区间数的上界, 丢失了一些有用的信息, 因而可能得到不符合人类思维习惯的比较结果.

**2.3　基于粗糙集的区间数排序方法**　刘学生等[13] 通过将区间数 $a$ 表示为粗糙集, 然后分别定义区间数粗糙集下近似的下限和上限, 以及上近似的下限和上限.据此, 刘学生等给出如下排序方法:

1) 基于下近似值的区间数排序法:

(ⅰ) 基于下近似值下限的区间数排序法;

(ⅱ) 基于下近似值上限的区间数排序法.

2) 基于上近似值的区间数排序法:

(ⅰ) 基于上近似值下限的区间数排序法;

(ⅱ) 基于上近似值上限的区间数排序法.

3) 折中表示排序法:

(ⅰ) 以区间数 $a$ 的下近似的上、下限值进行折中的结果为排序值;

(ⅱ) 以区间数 $a$ 的上近似的上、下限值进行折中的结果为排序值;

(ⅲ) 以 $a$ 的上、下近似的上、下限值中任意 2 组进行折中的结果为排序值.

**2.4　基于集对分析的区间数排序方法**　王万军[14–15] 利用集对分析中的联系数讨论了区间数的排序问题. 例如, 他首先将任意的区间数转化为 [0, 1] 中的区间数, 然后将 [0,1] 中的区间数转化为集对分析中的联系数, 同时定义联系数的势, 最后由联系数的势的大小对相应的区间数进行排序. 此种排序方法步骤较多, 工作量较大.

刘秀梅等[16] 通过将区间数转换成集对分析中的二元联系数, 据此给出了一种区间数的排序方法.

**2.5　基于向量相似度的区间数排序方法**　兰继斌等[17] 利用条件概率定义了 2 个区间数之间的相似度, 针对一组区间数的排序问题, 依据理想点法的思想, 构造一个目标区间数, 然后计算每个区间数与目标区间数之间的相似度, 相似度越大, 对应的区间数越大.

随后, 陈春芳等[18] 利用兰继斌等提炼区间数信息的思想, 构造由区间数中点值和区间数半径所形成的区间数信息向量, 给出了一种基于向量相似度的区间数排序方法. 其主要思想是对一组区间数的排序问题, 先构造相应的区间数信息向量和理想信息向量, 然后由向量的范数和向量的方向定义向量的相似度, 据此计算各区间数信息向量与理想信息向量的相似度, 相似度越大者, 其所对应的区间数排序越大.

**2.6　基于距离测度的区间数排序方法**　李霞等[19] 定义了区间数之间的距离公式, 对一组待排序的区间数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 首先确定正理想点 $\bar{a} = [\max_i a_i^-, \max_i a_i^+]$ 和负理想点 $\underline{a} = [\min_i a_i^-, \min_i a_i^+]$, 然后借助区间数之间的距离公式

$$d^2(a_i, a) = \left(\frac{a_i^- + a_i^+}{2} - \frac{a^- + a^+}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{a_i^+ - a_i^-}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^+ - a^-}{2}\right)^2\right] - \frac{1}{6}[(a_i \cap a)^+ - (a_i \cap a)^-]^2, \tag{4}$$

定义其排序函数, 式中 $a$ 是 $\bar{a}$ 或 $\underline{a}$, 给出由大到小的排序规则:

由正理想点获得的排序函数值越小, 表明该区间数越大; 排序函数值越大, 表明该区间数越小. 由负理想点获得的排序函数值所确定的排序规则正好相反.

刘建等[20] 利用区间数与理想点之间的距离定义了一种比较 2 个区间数大小的优势关系,即与理想点的距离小的区间数在决策中占优.

白玉娟[21] 利用区间数之间的偏差以及区间数的期望和宽度, 给出了一种新的区间数距离公式 $d(a, b)$, 然后采用李霞等的思想, 定义待排序区间数与正理想点或负理想点之间的距离, 与正理想点的距离越小, 则排序越靠前; 与正理想点的距离越大, 则排序越靠后. 相应地, 与负理想点的距离的情形正好相反.

谭吉玉等[22] 利用区间数的距离和 TOPSIS 方法, 定义区间数与正理想区间数的相对贴近度, 相对贴近度大者, 排序位置靠前.

**2.7　基于概率分布的区间数排序方法**　周光明等[23] 将评价值视为在给定区间上服从均匀分布的随机变量, 定义其数学期望和方差分别为

$$E(a)=\frac{1}{2}(a^-+a^+),\ D(a)=\frac{1}{12}(a^+-a^-)^2.$$

然后定义区间数的优先关系.区间数 $a$ 优于区间数 $b$, 记为$a>b$, 当且仅当以下 2 种情形之一发生:

1) $E(a)>E(b)$;

2) $E(a)=E(b)$且$D(a)<D(b)$.

张全等[24]将评价值视为服从以区间中点为均值的正态分布,由正态分布的$3\sigma$法则确定正态分布的均方差,建立了比较区间数$a=[a^-,a^+]$, $b=[b^-,b^+]$的可能度公式.设评价值$\xi_a$随机地落在区间$[a^-,a^+]$中的某个位置,服从以区间中点为均值的正态分布,且$\mu_a=\dfrac{a^-+a^+}{2}$, $\sigma_a=\dfrac{a^+-a^-}{6}$.这里,将$\xi_a$、$\xi_b$视为独立的随机变量,$f_a(t)$和$f_b(t)$分别为它们的概率密度函数.然后分 2 种情形定义区间数 $a$ 优于区间数 $b$ 的可能度.

1) 当$b^-\leqslant a^-\leqslant b^+\leqslant a^+$时,有

$$P_1(a\geqslant b)=\int_{b^+}^{a^+}f_a(x)\mathrm{d}x+\int_{a^-}^{b^+}f_a(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{b^-}^{a^-}f_b(y)\mathrm{d}y+\int_{a^-}^{b^+}f_a(x)\int_{a^-}^{x}f_b(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \tag{5}$$

2) 当$a^-\leqslant b^-\leqslant b^+\leqslant a^+$时,有

$$P_1(a\geqslant b)=\int_{b^+}^{a^+}f_a(x)\mathrm{d}x+\int_{b^-}^{b^+}f_a(x)\int_{b^-}^{x}f_b(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \tag{6}$$

再由可能度的大小完成对区间数的排序.此方法的难度在于可能度公式中二重积分的计算,张全等[24]建议用数值分析中的 Simpson 方法计算二重积分的近似值.

随后,徐改丽等[25]根据正态分布的$3\sigma$原则,建立了比较区间数$a=[a^-,a^+]$, $b=[b^-,b^+]$的可能度公式

$$P_2(a\geqslant b)=\Phi\left(\frac{\mu_a-\mu_b}{\sqrt{\sigma_a^2+\sigma_b^2}}\right). \tag{7}$$

式中$\Phi(t)$为标准正态分布的分布函数,$\mu_a$和$\sigma_a$的计算方法同上.

邱涤珊等[26]假定 $X$、$Y$ 分别为区间$a=[a^-,a^+]$, $b=[b^-,b^+]$上的随机变量,$f_X(x)$和$f_Y(y)$为其概率密度函数,则定义概率可信度

$$P_3(a\geqslant b)=\iint\limits_{x\geqslant y}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{8}$$

其排序规则为:若$P_3(a\geqslant b)>0.5$, 则认为$a>b$; 若$P_3(a\geqslant b)<0.5$, 则认为$b>a$; 若$P_3(a\geqslant b)=0.5$, 则认为$a=b$成立.

唐平等[27]通过引入二元分布函数,给出了一种区间数的排序方法,其思想与邱涤珊等大同小异.

Kundu[28]利用均匀分布定义了 2 个用于比较区间数大小的模糊偏好关系,但该公式计算较为复杂.

Ahn[29]指出在每个区间范围内不同的取值具有不同的含义,因此,将区间数所限定的范围内的取值视为服从具有某个概率密度函数的概率分布更为合理.假定$f_a(x)$和$f_b(y)$分别为区间数 $a$、$b$ 所确定的概率密度函数,Ahn 分 3 种情形进行考虑,定义了$a$优于$b$的可信度$P_4(a\geqslant b)$,其计算公式如下:

情形 1 $b^+\leqslant a^-$, 则

$$P_4(a\geqslant b)=1. \tag{9}$$

情形 2 $b^-\leqslant a^-\leqslant b^+\leqslant a^+$, 则

$$\begin{aligned}P_4(a\geqslant b)&=\int_{b^-}^{a^-}f_b(y)\mathrm{d}y+\int_{a^-}^{b^+}f_b(y)\mathrm{d}y\cdot\int_{b^+}^{a^+}f_a(x)\mathrm{d}x+\int_{a^-}^{b^+}f_b(y)\int_{y}^{a^+}f_a(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\&\int_{b^+}^{a^+}f_a(x)\mathrm{d}x+\int_{a^-}^{b^+}f_a(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{b^-}^{a^-}f_b(y)\mathrm{d}y+\int_{a^-}^{b^+}f_a(x)\int_{a^-}^{x}f_b(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{10}$$

同理,$b$优于$a$可信度$P_4(b\geqslant a)$定义为

$$P_4(b\geqslant a)=\int_{a^-}^{b^+}f_b(y)\int_{a^-}^{y}f_a(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{a^-}^{b^+}f_a(x)\int_{x}^{b^+}f_b(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \tag{11}$$

情形 3　$a^-\leqslant b^-\leqslant b^+\leqslant a^+$, 则

$$P_4(a\geqslant b)=\int_{b^+}^{a^+}f_a(x)\mathrm{d}x+\int_{b^-}^{b^+}f_b(y)\int_{y}^{b^+}f_a(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{12}$$

同理, $b$优于$a$可信度$P_4(b\geqslant a)$定义为

$$P_4(b\geqslant a)=\int_{a^-}^{b^-}f_a(x)\mathrm{d}x+\int_{b^-}^{b^+}f_b(y)\int_{b^-}^{y}f_a(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{13}$$

可以看出, Ahn 的思想与张全等给出的方法非常相似, 只不过 Ahn 建议在计算时, $f_a(x)$和$f_b(y)$可视为区间$[a^-, a^+]$和$[b^-, b^+]$上的均匀分布的概率密度函数, 这样, 二重积分的计算就变得相对简单.

**2.8　基于优势度的区间数排序方法**　为了进一步区分区间数中点值相等的区间数, 张吉军[30] 给出了如下优势度的计算公式:

$$P_5(a\geqslant b)=\begin{cases}1-1/2\rho^{\frac{a^+-b^-}{l(a)+l(b)}-\frac{1}{2}}, & (a^+-b^-)/(l(a)+l(b))\geqslant 1/2,\\ 1/2\rho^{\frac{1}{2}-\frac{a^+-b^-}{l(a)+l(b)}}, & (a^+-b^-)/(l(a)+l(b))<1/2,\end{cases} \tag{14}$$

式中$\rho>1$.

进一步, 谢海[31] 指出张吉军[30] 定义的优势度只是利用了区间数的 2 个端点来计算, 区间数内部的信息没有得到充分的利用, 从而导致最终决策失误的可能性. 为此, 谢海[31] 利用 S 型函数给出了如下改进的相对优势度公式

$$P_6(a\geqslant b)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{b^--a^-}}, & l(a)=l(b),\\ \dfrac{1}{l(a)-l(b)}\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{a^+-b^+}}{1+\mathrm{e}^{a^--b^-}}\right), & l(a)\neq l(b).\end{cases} \tag{15}$$

随后, 王中兴等[32] 以反例说明式(14)对某些中点值相等的区间数仍然不能加以区分, 并利用 S 型函数给出如下改进公式:

$$P_7(a\geqslant b)=\begin{cases}\dfrac{1}{l(a)}\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{a^+}}{1+\mathrm{e}^{a^-}}\right)-\dfrac{1}{l(b)}\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{b^+}}{1+\mathrm{e}^{b^-}}\right), & l(a)\neq 0, l(b)\neq 0,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{a^-}}{1+\mathrm{e}^{a^-}}-\dfrac{1}{l(b)}\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{b^+}}{1+\mathrm{e}^{b^-}}\right), & l(a)=0, l(b)\neq 0,\\ \dfrac{1}{l(a)}\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{a^+}}{1+\mathrm{e}^{a^-}}\right)-\dfrac{\mathrm{e}^{b^-}}{1+\mathrm{e}^{b^-}}, & l(a)\neq 0, l(b)=0,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{a^-}}{1+\mathrm{e}^{a^-}}-\dfrac{\mathrm{e}^{b^-}}{1+\mathrm{e}^{b^-}}, & l(a)=0, l(b)=0.\end{cases} \tag{16}$$

事实上, 利用式(16)所得到的结果有时也违背常理.

例 2　令 $a=[2.8838, 5.8787]$, $b=[1.0245, 8.1240]$, 因为 $b$ 的中点值大于 $a$ 的中点值, 则一般会认为 $b>a$, 即应有$P_7(b\geqslant a)>0$. 但实际的计算结果却为$P_7(b\geqslant a)=-0.0259<0$. 这说明式(16)也是一个不科学的排序公式.

**2.9　基于可能度的区间数排序方法**　基于可能度的区间数排序方法是目前应用最为广泛的一种排序方法. 这种排序方法的基本思想是通过定义一种反映一个区间数大于另一个区间数程度的量, 并以该度量为基础导出区间数之间的排序.

设$a=[a^-, a^+]$, $b=[b^-, b^+]$为 2 个区间数, 令$l(a)=a^+-a^-$, $l(b)=b^+-b^-$, 以下是几个较为常用的可能度公式[33−40]:

$$P_8(a\geqslant b)=\min\{\max\left(\frac{a^+-b^-}{l(a)+l(b)}, 0\right), 1\}; \tag{17}$$

$$P_9(a\geqslant b)=\frac{\max\{0, l(a)+l(b)-\max(0, b^+-a^-)\}}{l(a)+l(b)}; \tag{18}$$

$$P_{10}(a \geqslant b) = \max\{1 - \max\left(\frac{b^+ - a^-}{l(a)+l(b)},\ 0\right),\ 0\}; \tag{19}$$

$$P_{11}(a \geqslant b) = \begin{cases} 1, & b^+ < a^-, \\ \dfrac{a^+ - b^-}{l(a)+l(b)}, & b^- \leqslant a^+, a^- \leqslant b^+, \\ 0, & b^- \geqslant a^+; \end{cases} \tag{20}$$

$$P_{12}(a \geqslant b) = \frac{\max\{0, a^+ - b^-\} - \max(0, a^- - b^+)\}}{l(a)+l(b)}; \tag{21}$$

$$P_{13}(a \geqslant b) = \max\{1 - \frac{1}{2}\max\left(\frac{(b^- + b^+) - (a^- + a^+)}{l(a)+l(b)} + 1,\ 0\right),\ 0\}; \tag{22}$$

**定理 1** $P_8(a \geqslant b) = P_9(a \geqslant b) = P_{10}(a \geqslant b) = P_{11}(a \geqslant b) = P_{12}(a \geqslant b) = P_{13}(a \geqslant b)$.

**证明:** 先证$P_8(a \geqslant b) = P_9(a \geqslant b)$.

若$a^- \geqslant b^+$, 那么$P_8(a \geqslant b) = 1$, $P_9(a \geqslant b) = \dfrac{\max\{0, l(a)+l(b)\}}{l(a)+l(b)} = 1$, 故结论成立;

若$a^+ < b^-$, 那么$P_8(a \geqslant b) = 0$, $P_9(a \geqslant b) = \dfrac{\max\{0, 0\}}{l(a)+l(b)} = 0$, 此时结论成立;

若 $a^- < b^+$且 $a^+ \geqslant b^-$, 则 $a^+ - b^- < l(a)+l(b)$, 于是 $P_8(a \geqslant b) = \dfrac{a^+ - b^-}{l(a)+l(b)}$, $P_9(a \geqslant b) = \dfrac{\max\{0, l(a)+l(b) - b^+ + a^-\}}{l(a)+l(b)} = \dfrac{a^+ - b^-}{l(a)+l(b)}$, 此时结论成立.

综上, 知$P_8(a \geqslant b) = P_9(a \geqslant b)$成立.

同理可证$P_8(a \geqslant b) = P_{10}(a \geqslant b)$, $P_8(a \geqslant b) = P_{11}(a \geqslant b)$, $P_8(a \geqslant b) = P_{12}(a \geqslant b)$.

再证$P_8(a \geqslant b) = P_{13}(a \geqslant b)$:

$$P_{13}(a \geqslant b) = \max\{1 - \frac{1}{2}\max\left(\frac{(b^- + b^+) - (a^- + a^+)}{l(a)+l(b)} + 1,\ 0\right),\ 0\} = \max\{1 - \frac{1}{2}\max\left(\frac{2b^+ - 2a^-}{l(a)+l(b)},\ 0\right),\ 0\} = \max\{1 - \max\left(\frac{b^+ - a^-}{l(a)+l(b)},\ 0\right),\ 0\} = P_8(a \geqslant b).$$

综上, 定理 1 成立, 证毕.

此外, 一些学者从另外的不同角度出发, 还给出了一些可能度的计算方法[41−45]:

$$P_{14}(a \geqslant b) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(a^+ - b^+) + (a^- - b^-)}{|a^+ - b^+| + |a^- - b^-| + l_{ab}}\right), \tag{23}$$

式中$l_{ab}$表示这 2 个区间相交部分的长度. 此公式的主要特点是表达式简单, 且计算结果与式(17)~(22)的结果不同.

$$P_{15}(a \geqslant b) = \begin{cases} 1, & a^- \geqslant b^+, \\ \dfrac{a^+ - b^+}{l(a)} + \dfrac{(b^+ - a^-)(a^- - b^-)}{l(a)l(b)} + \dfrac{(b^+ - a^-)(b^+ - a^-)}{2l(a)l(b)}, & b^- \leqslant a^- \leqslant b^+ \leqslant a^+, \\ \dfrac{(a^+ - b^+)}{l(a)} + \dfrac{(b^+ - b^-)}{2l(a)}, & a^- \leqslant b^- \leqslant b^+ \leqslant a^+. \end{cases} \tag{24}$$

由$P_{15}(b \geqslant a) = 1 - P_{15}(a \geqslant b)$, 可确定可能度$P_{15}(b \geqslant a)$.

$$P_{16}(a \geqslant b)=\begin{cases}1, & a^- \geqslant b^+,\\ 1-\dfrac{(b^+-a^-)^2}{2l(a)l(b)}, & b^- \leqslant a^- \leqslant b^+ \leqslant a^+,\\ \dfrac{a^++a^--2b^-}{2l(b)}, & b^- \leqslant a^- \leqslant a^+ \leqslant b^+,\\ \dfrac{2a^+-b^+-b^-}{2l(a)}, & a^- \leqslant b^- \leqslant b^+ \leqslant a^+,\\ \dfrac{(a^+-b^-)^2}{2l(a)l(b)}, & a^- \leqslant b^- \leqslant a^+ \leqslant b^+,\\ 0, & a^- \leqslant a^+ \leqslant b^- \leqslant b^+.\end{cases} \tag{25}$$

$$P_{17}(a \geqslant b)=\begin{cases}1, & b^+ < a^-,\\ \dfrac{(a^+-b^-)^2}{(a^+-b^-)^2+(b^+-a^-)^2}, & b^- \leqslant a^+, a^- \leqslant b^+,\\ 0, & b^- \geqslant a^+.\end{cases} \tag{26}$$

$$P_{18}(a \geqslant b)=\begin{cases}1, & a^- \geqslant b^+,\\ \dfrac{a^+-b^+}{l(a)}+\dfrac{b^+-a^-}{l(a)!}\cdot\dfrac{a^--b^-}{l(b)}, & b^- \leqslant a^- \leqslant b^+ \leqslant a^+,\\ (a^+-b^++a^--b^-)/l(a), & a^- \leqslant b^- \leqslant b^+ \leqslant a^+.\end{cases} \tag{27}$$

由 $P_{18}(b \geqslant a)=-P_{18}(a \geqslant b)$, 可确定可能度 $P_{18}(b \geqslant a)$.式(27)没有考虑到区间数退化为实数的情形. 例如, $a$=3, $b$=[2, 4], 则 $P_{18}(a \geqslant b)$无法计算.

式(18)~(27), 即 $P_9(a \geqslant b) \sim P_{18}(a \geqslant b)$, 所确定的可能度均满足以下性质.

**定理 2** 设 $a=[a^-, a^+]$, $b=[b^-, b^+]$为 2 个区间数, $P(\cdot)$为可能度公式(18)~(27)中的任意一个, 则有

1) $0 \leqslant P(a \geqslant b) \leqslant 1$;

2) $P(a \geqslant b)+P(b \geqslant a)=1$, 特别地, $P(a \geqslant a)=0.5$;

3) $P(a \geqslant b)=1$, 当且仅当 $a^- \geqslant b^+$;

4) $P(a \geqslant b)=0$, 当且仅当 $a^+ \leqslant b^-$;

5) $P(a \geqslant b) \geqslant 0.5$, 当且仅当 $a^-+a^+ \geqslant b^-+b^+$, 特别地, $P(a \geqslant b)=0.5$, 当且仅当 $a^-+a^+=b^-+b^+$;

6) 若 $P(a \geqslant b) \geqslant 0.5$, $P(b \geqslant c) \geqslant 0.5$, 则 $P(a \geqslant c) \geqslant 0.5$. 若其中有一个不等号成立, 则 $P(a \geqslant c)>0.5$.

对于区间数 $a$、$b$, 若 $P(a \geqslant b)>0.5$, 则认为 $a$ 大于 $b$, 记为 $a>b$.

利用可能度对一组区间数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 进行排序, 目前广为采用的是如下排序算法[29−32, 36−45]:

1) 先对区间数进行两两比较, 求得相应的可能度 $P_{ij}=P(a_i \geqslant a_j)(i, j=1, 2, \cdots, n)$, 建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}=(P_{ij})_{n\times n}$;

2) 令 $\lambda_i=\dfrac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}+\dfrac{n}{2}-1\right)$, 得到排序向量 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$;

3) 根据 $\lambda_i$ 的大小对区间数进行排序.

为行文方便, 我们称这种区间数排序方法为可能度矩阵行求和法.

# 3　可能度矩阵行求和法的分析与改进

## 3.1　可能度矩阵行求和法存在的问题

**问题 1** 排序结果与可能度的含义相悖.

例 3 针对 3 个区间数 $a=[0, 8]$, $b=[4.8, 9]$, $c=[1, 13]$进行排序.

利用式(17), 有 $P_8(b \geqslant a)=0.7377$, $P_8(c \geqslant a)=0.6500$, $P_8(c \geqslant b)=0.5062$. 构建可能度矩阵, 然后对其进行求和, 可得 $\lambda_2=0.3719$, $\lambda_3=0.3594$, 因此有 $\lambda_2>\lambda_3$.

根据可能度的含义, 即张吉军[30] 所强调的"引进可能度的本意是用可能度来刻画一个区间数大于另一个区间数的程度", 则由 $P_8(\cdot)$计算的结果应理解为 $c$ 大于 $b$,记为 $c>b$, 但若按可能度矩阵行求和法进行排序, 则

认为是$b>c$, 显然这样的排序结果与可能度的含义相矛盾. 其他可能度公式所得到的排序结果也类似, 这表明: 可能度矩阵行求和法作为一种排序方法的科学性需要进一步思考.

**问题 2** 排序结果不满足保序性.

例 3 利用可能度矩阵行求和法对于区间数 $a$、$b$、$c$ 进行排序时, 得到了 $b>c$ 的结论. 下面我们再增加一个区间数$d=[10,12]$,于是针对 4 个区间数 $a$、$b$、$c$、$d$ 进行排序. 仍以式(17)进行分析, 可得, $P_8(b\geqslant d)=0$, $P_8(c\geqslant d)=0.2143$,此时$\lambda_2=0.2276$, $\lambda_3=0.2392$, 可知$\lambda_2<\lambda_3$, 那么由可能度矩阵行求和法, 就得到$c>b$, 这说明按照相同的排序方法却得到了与之前相反的结论.这也表明: 可能度矩阵行求和法所得到的区间数排序结果不满足保序性, 因而其科学性也需要进一步思考, 类似地, 利用其他可能度公式也会得到类似的结论.

**3.2 基于布尔矩阵的区间数排序方法** 为了克服可能度矩阵行求和法的上述不足, 李德清等[46]给出了一种改进的基于可能度的区间数排序方法, 并称其为基于布尔矩阵的区间数排序方法. 其计算步骤如下:

1) 假若需对一组区间数$a_1, a_2, \cdots, a_n$进行排序, 先对区间数进行两两比较, 求得相应的可能度$P_{ij}=P(a_i\geqslant a_j)(i, j=1, 2, \cdots, n)$, 建立可能度矩阵$\boldsymbol{P}=(P_{ij})_{n\times n}$;

2) 构造布尔矩阵$\boldsymbol{Q}=(q_{ij})_{n\times n}$, 称 $\boldsymbol{Q}$ 为区间数$a_1, a_2, \cdots, a_n$的排序矩阵, 其中

$$q_{ij}=\begin{cases}1, & P_{ij}\geqslant 0.5,\\ 0, & P_{ij}<0.5;\end{cases} \tag{28}$$

3) 令$\lambda_i=\sum_{j=1}^{n} q_{ij}$, 得到排序向量$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$;

4) 根据$\lambda_i$的大小对区间数进行排序.

目前基于布尔矩阵的区间数排序方法被应用于区间值犹豫模糊元的合成算子及其排序[47]和加权区间值犹豫模糊集及其群决策[48], 均取得了良好的效果, 当然, 它的科学性还期待进一步的分析与研究. 同时, 区间数的排序问题是一个永恒的话题, 伴随着应用的不断深入[49-55], 一定可以极大地丰富其相关的理论研究和应用成果.

## 4 结论

区间数排序问题是不确定性决策领域的一大研究热点, 众多学者围绕着这一问题做了大量而有意义的研究工作, 取得了丰硕的研究成果. 学者们从不同的角度和不同的研究目的出发, 进行了卓有成效的探讨和分析, 所得到的排序方法各具特点, 能满足不同实际问题的需要, 同时也都为后续的研究提供了有益的帮助, 因此, 很难说哪一种排序方法是尽善尽美的, 能满足所有与区间数有关的问题的需要. 因此有必要对现有的区间数排序方法进行系统的梳理和总结, 对具有共性的方法进行归类, 以便于分析每类方法的特点和不足, 这也有助于决策者在解决实际问题的过程中选用合适的排序方法. 本文正是从这一目的出发, 对文献中的区间数排序方法尽可能做了详尽的分析和总结, 希望能为大家的研究带来一些方便和启发. 另外, 本文的一些结果还提醒关注此问题的研究者, 在给出新的区间数排序方法时, 一定要与已有的方法进行比较. 就像本文所讨论的 6 个可能度公式, 以及利用概率分布得到的 2 个可能度公式, 都说明相关的研究者基于自己的思考角度, 做了一些形式上有所不同的有意义的工作.

## 5 参考文献


[1] MOORE R E. Interval analysis［M］. Englewood Cliffs, N J: Prentice Hall, 1966

[2] MOORE R E. Methods and applications of interval analysis［M］. Philadelphia, PA: SIAM, 1979

[3] 吴江, 黄登仕. 区间数排序方法研究综述［J］. 系统工程, 2004, 22(8): 1

[4] 孙海龙, 姚卫星. 区间数排序方法评述［J］. 系统工程学报, 2010, 25(3): 304

[5] 曾文艺, 罗承忠, 肉孜阿吉. 区间数的综合决策模型［J］. 系统工程理论与实践, 1997, 17(11): 48

[6] SENGUPTA A, PAL T K. On comparing interval numbers［J］. European Journal of Operation Research, 2000, 127: 28

[7] 刘进生, 王绪柱, 张宝玉. 区间数排序［J］. 工程数学学报, 2001, 18(4): 103

[8] 赵慧冬, 包玉娥, 关世霞. 区间数的几何平均排序函数及其应用［J］. 内蒙古民族大学学报(自然科学版), 2011, 26(6): 624

[9] 樊治平, 张全. 具有区间数的多属性决策问题的分析方法［J］. 东北大学学报(自然科学版), 1998, 19(4): 432

[10] 仇国芳，李怀祖. 区间数排序的包含度度量及构造方法［J］. 运筹与管理，2003，12(3)：13

[11] 张兴芳，张兴伟. 区间数的排序及其在系统决策中的应用［J］. 系统工程理论与实践，1999，19(7)：112

[12] 孙海龙，姚卫星. 区间数排序方法评述［J］. 系统工程学报，2010，25(3)：18

[13] 刘学生，吴伟，邹开其. 区间数排序的粗糙集方法［J］. 大连理工大学学报，2008，48(1)：143

[14] 王万军. 区间数排序的一种联系数方法［J］. 计算机工程与设计，2009，30(8)：2055

[15] 王万军. 一种基于偏联系数的区间数排序方法及其应用［J］. 甘肃联合大学学报(自然科学版)，2008，22(1)：48

[16] 刘秀梅，赵克勤. 区间数伴语言变量的混合多属性决策［J］. 模糊系统与数学，2014，28(1)：113

[17] 兰继斌，胡明明，叶新苗. 基于相似度的区间数排序［J］. 计算机工程与设计，2011，32(4)：1419

[18] 陈春芳，朱传喜. 基于向量相似度的区间数排序方法及其应用［J］. 统计与决策，2014，399(3)：76

[19] 李霞，张绍林，张淼,等. 基于新距离测度的区间数排序［J］. 西华大学学报(自然科学版)，2008，27(1)：87

[20] 刘健，刘思峰. 属性值为区间数的多属性决策对象排序研究［J］. 中国管理科学，2010，18(3)：90

[21] 白玉娟. 基于期望和宽度的新距离测度的区间数排序［J］. 河西学院学报，2015，31(5)：13

[22] 谭吉玉，朱传喜，张小芝，等. 一种新的基于TOPSIS的区间数排序方法［J］. 统计与决策，2015，421(1)：94

[23] 周光明，刘树人. 不确定多属性决策中区间数的一种新排序法［J］. 系统工程，2006，24(4)：115

[24] 张全，樊治平，潘德惠. 区间数多属性决策中一种带有可能度的排序方法［J］. 控制与决策，1999，14(6)：703

[25] 徐改丽，伍艳春. 基于乘性一致的区间数互补判断矩阵排序法［J］. 模糊系统与数学，2013，27(1)：124

[26] 邱涤珊，贺川，朱晓敏. 基于概率可信度的区间数排序方法［J］. 控制与决策，2012，27(12)：1894

[27] 唐平，韦美雁. 区间数权向量排序方法研究［J］. 数学的实践与认识，2008，38(8)：59

[28] KUNDU S. Min-transitivity of fuzzy leftness relationship and its application to decision making［J］. Fuzzy Sets and Systems，1997，86：357

[29] AHN B S. The uncertain OWA aggregation with weighting functions having a constant level of orness［J］. International Journal of Intelligent Systems，2006，21：469

[30] 张吉军. 区间数的排序方法研究［J］. 运筹与管理，2003，12(3)：18

[31] 谢海. 基于改进的相对优势度的区间数排序［J］. 科学技术与工程，2008，8(22)：5983

[32] 王中兴，邵翠丽，唐芝兰. 基于相对优势度的区间数排序及其在多属性决策中的应用［J］. 模糊系统与数学，2013，27(2)：142

[33] NAKAHARA Y, SASAKI M, GEN M. On the linear programming problems with interval coefficients［J］. International Journal of Computer Industrial Engineering，1992，23：301

[34] FACCHINETTI G, RICCI R G, MUZZIOLI S. Note on ranking fuzzy triangular numbers［J］. International Journal of Intelligent Systems，1998，13：613

[35] 达庆利，刘新旺. 区间数线性规划及其满意解［J］. 系统工程理论与实践，1999，19(4)：3

[36] 徐泽水，达庆利. 区间数的排序方法研究［J］. 系统工程，2001，19(6)：94

[37] 徐泽水，达庆利. 区间数排序的可能度法及其应用［J］. 系统工程学报，2003，18(1)：67

[38] 高峰记. 可能度及区间数综合排序［J］. 系统工程理论与实践，2013，33(8)：2033

[39] WANG Y M, YANG J B, XU D L. A two-stage logarithmic goal programming method for generating weights from interval comparison matrices［J］. Fuzzy Sets and Systems，2005，152：475

[40] ZHOU L G, CHEN H Y, MERIGO J M, GIL-LAFUENTE A M. Uncertain generalized aggregation operators［J］. Expert Systems with Applications，2012，39：1105

[41] 李德清，谷云东. 一种基于可能度的区间数排序方法［J］. 系统工程学报，2008，23(2)：243

[42] 张全，樊治平，潘德惠. 不确定性多属性决策中区间数的一种排序方法［J］. 系统工程理论与实践，1999，19(5)：129

[43] 肖峻，张跃，付川. 基于可能度的区间数排序方法比较［J］. 天津大学学报(自然科学与工程技术版)，2011，44(8)：705

[44] 兰继斌，曹丽娟，林健. 基于二维优先度的区间数排序方法［J］. 重庆理工大学学报(自然科学版)，2007，21(10)：63

[45] 李志林. 区间数的一种改进的排序方法［J］. 数学的实践与认识，2004，34(6)：125

[46] 李德清，韩国柱，曾文艺，等. 基于布尔矩阵的区间数排序方法［J］. 控制与决策，2016，31(4)：629

[47] ZENG W Y, LI D Q, GU Y D. Note on the aggregation operators and ranking of hesitant interval-valued fuzzy elements［J］. Soft Computing，2019，23：8075

[48] ZENG W Y, LI D Q, YIN Q. Weighted interval-valued hesitant fuzzy sets and its application in group decision making［J］. International Journal of Fuzzy Systems，2019，21(2)：421

[49] 叶义成，姚囝，王其虎. 采用区间数排序的采矿方法优选模型及其应用［J］. 控制理论与应用，2016，33(8)：1015

[50] 陈政，武永祥，王丹爽. 基于区间数排序的住房选择方案评价研究［J］. 工程管理学报，2016，30(5)：131

[51] 靳留乾，方新，徐杨. 基于证据推理和前景理论的区间多属性决策方法［J］. 模糊系统与数学，2017，31（6）：124

[52] 南江霞，卜红，李登峰. 直觉模糊联盟合作博弈的非线性规划模型［J］. 运筹与管理，2018，27（1）：43

[53] 吕跃进，杨燕华. 区间粗糙数层次分析法［J］. 系统工程理论与实践，2018，38（3）：786

[54] 吴诗辉，刘晓东，解江，等. 不完全专家信息条件下基于区间数排序的群决策方法研究［J］. 数学的实践与认识，2019，49（5）：11

[55] 钱吴永，董扬兵. 基于改进向量相似度的区间数动态多指标决策模型及应用［J］. 控制与决策，2019，34（1）：25

# Ranking interval numbers: a review

LI Deqing[1,2]　ZENG Wenyi[2]†　YIN Qian[2]

（1）School of Computer and Artificial Intelligence, Xiamen Institute of Technology, 361021, Xiamen, Fujian, China;
2）School of Artificial Intelligence, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China）

**Abstract** It is important to rank interval numbers in uncertain decision-making field. Ranking methods of interval numbers are analyzed systematically. Rankings is classified into nine classes. Characteristics and drawbacks of each are discussed. Ranking by possibility degree widely used in uncertain multiple-attribute decision-making is examined in some detail. Different formulas of possibility degree are presented, their features and properties are discussed. Six different possibility formulae are proven equivalent. The popular methodology of ranking a set of interval numbers by possibility degree matrix is investigated. Result obtained by this ranking method is sometimes contrary to the meaning of possibility degree or violates rank preservation. Revised ranking by Boolean matrix is discussed.

**Keywords** interval number; rank of interval number; possibility degree; order preserving