高阶动力学粒子的布朗运动*

涂展春†
(北京师范大学物理学系, 100875, 北京)

摘要 讨论了与谐振子热浴耦合的高阶动力学粒子的运动行为, 导出了含高阶动力学的朗之万方程及其对应的福克-普朗克方程.

关键词 高阶动力学; 布朗运动; 朗之万方程; 福克-普朗克方程

中图分类号 O414.2 **DOI:** 10.12202/j.0476-0301.2023187

经典力学的基本动力学方程由牛顿第二定律(力等于质量乘加速度)给出. 加速度是坐标对时间的二阶导数, 而经典力学中的力通常不包含比速度(坐标对时间的一阶导数)更高阶的导数. 因此, 经典力学的基本动力学方程通常是二阶微分方程(不包含比坐标对时间二阶导数更高阶的导数). 对应地, 拉格朗日量只是广义坐标、广义速度和时间的函数, 不包含广义坐标对时间的二阶导数或更高阶的导数. 从人类对力学规律认识的历程来看, 最早可追溯到亚里士多德的力学观, 他认为力决定速度, 本文称之为一阶动力学. 直到伽利略和牛顿时代, 人类才认识到力决定加速度, 本文称之为二阶动力学. 如果考虑流体中运动的物体, 由阻尼系数和物体质量给定了动量的弛豫时间, 可以证明, 当观察者能分辨的最小时间尺度远大于弛豫时间时, 无法观察到速度的暂变过程, 即无法观察到惯性效应. 此时, 从牛顿力学给出的结论是速度由力与阻尼系数决定, 从而牛顿力学观退化到亚里士多德力学观. 当前的科学研究表明, 微生物生活的尺度下, 运动规律确实符合亚里士多德力学观. 很庆幸的是, 人类生活在米的尺度, 空气的阻力不够大, 惯性效应是明显的, 从而能够较快地发现亚里士多德力学观的不足, 进而提出牛顿力学. 从理论延拓的角度来讲, 一个自然的想法是, 在更大的空间尺度上, 将动力学方程拓展到包含坐标对时间的三阶导数或更高阶导数的情形. 这种高阶效应在人类生活的尺度是可以忽略的, 但在天文观察的大尺度上, 可能会起作用, 这对于理解某些偏离当前理论的天文现象(如暗物质)提供了可能的替代方案.

我们将由包含坐标对时间的高阶(三阶或以上)导数的动力学方程所描述的系统简称为高阶动力学系统. 对于高阶动力学系统的讨论可以追溯到Ostrogradsky[1]. 他讨论了拉格朗日量包含广义坐标对时间的二阶导数或更高阶导数的情形(对应的动力学方程包含坐标对时间的三阶或更高阶导数). 他发现对应的哈密顿量没有下界, 导致系统出现动力学不稳定性. Lorentz、Abraham 和狄拉克讨论了包含辐射的电子运动, 发现力包含坐标对时间的三阶导数[2−3]. 狄拉克的电子运动理论被 Bhabha 推广来描述中子的运动[4]. 张宗燧分析了狄拉克电子理论和 Bhabha 中子理论的自身加速行为[5]. Pais 和 Uhlenbeck 讨论了用四阶微分方程描述的振子模型以及构造哈密顿量的方法[6], 该模型成为后续高阶导数量子场论的基础. 张宗燧比较了由 Ostrogradsky 方法和 Pais-Uhlenbeck 方法导出的量子化方程, 发现二者是等价的[7]. 高阶动力学的研究思想也被拓展到 Podolsky 广义电动力学[8−9]、Polyakov 超弦理论[10]、修改的引力理论[11−14]、Timoshenko 梁理论[15]、非厄密物理[16−17]、Starobinsky 暴涨理论[18] 等.

20 世纪初, 朗之万提出了一个方程来描述液体中布朗粒子的运动, 该方程被称为朗之万方程[19]. 在一维情况下, 朗之万方程可以表示为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F-\mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\eta(t), \tag{1}$$

式中: x 表示布朗粒子的位置; t 表示时间; m 表示粒子的质量; $-\mu\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 表示粒子受到液体的阻尼力; F 表示粒子受到的确定性外力(不包含液体阻尼力$-\mu\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$); $\eta(t)$表示液体分子对布朗粒子碰撞的随机力. 通常假

* 国家自然科学基金资助项目(11975050)
† 通信作者: 涂展春(1977—), 博士, 教授. 研究方向: 理论物理. E-mail: tuzc@bnu.edu.cn
收稿日期: 2023-03-15

定随机力是高斯噪声,其均值为零,即

$$\langle\eta(t)\rangle=0, \tag{2}$$

而噪声的关联满足

$$\langle\eta(t)\eta(s)\rangle=2\mu k_{\mathrm{B}}T\delta(t-s), \tag{3}$$

式中: k_{B} 是玻耳兹曼因子; T 表示液体温度; $\delta(t)$ 是狄拉克 δ 函数. 朗之万是基于牛顿第二定律凭直觉写出方程(1)的. 如何从微观上导出朗之万方程,吸引了众多学者的研究兴趣,其中最有代表性的工作是 Zwanzig 方案[20]. 该方案是 Ford 等[21] 工作的推广和简化版本. Zwanzig 考虑一个质量为 m 的粒子置于谐振子热浴中,粒子与谐振子线性耦合. 假定谐振子热浴满足温度为 T 的玻耳兹曼分布,当对热浴的变量积分后, Zwanzig 导出了粒子的运动满足朗之万方程(1),且其中的噪声满足方程(2)和(3). 从理论拓展的角度来看,讨论与谐振子热浴耦合的高阶动力学粒子的运动行为是十分有价值的. 我们将这一模型作为讨论高阶动力学粒子布朗运动的基础. 在本文中,我们将导出含高阶动力学的朗之万方程及其对应的福克-普朗克方程.

1 高阶动力学

本章介绍 Ostrogradsky 对高阶动力学的处理方案[1]. 为了叙述方便,考虑单个自由度的系统,用 x 表示广义坐标. 假定系统的拉格朗日量可以表示为

$$L=L(t,x,x_1,\cdots,x_N), \tag{4}$$

式中 x_n 表示 x 对时间 t 的第 n 阶导数, $n=0, 1, 2, \cdots, N$, 约定 $x_0=x$. 通过变分法,可以导出相应的拉格朗日方程为

$$\sum_{n=0}^{N}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n}\frac{\partial L}{\partial x_n}=0. \tag{5}$$

定义广义动量[1]

$$p_n=\sum_{k=n+1}^{N}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{k-n-1}\frac{\partial L}{\partial x_k}, \tag{6}$$

式中 $n=0, 1, \cdots, N\text{-}1$, 特别是当 $n=0$ 时,

$$p_0=\sum_{k=1}^{N}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{k-1}\frac{\partial L}{\partial x_k}, \tag{7}$$

不难看出,

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t}=-\sum_{n=1}^{N}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n}\frac{\partial L}{\partial x_n}. \tag{8}$$

下面构造哈密顿量. 在式(6)中取 $n=N-1$, 可以得到

$$p_{N-1}=\frac{\partial L(t,x,x_1,\cdots,x_N)}{\partial x_N}. \tag{9}$$

原则上,通过式(9)可以反解出 x_N, 将 x_N 表示为与 $t, x, x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}$ 和 p_{N-1} 的函数

$$x_N=\phi(t,x,x_1,\cdots,x_{N-1},p_{N-1}). \tag{10}$$

于是通过勒让德变换可以得到哈密顿量[1]

$$\begin{aligned}H=&p_0x_1+p_1x_2+p_2x_3+\cdots+p_{N-2}x_{N-1}+\\&p_{N-1}x_N-L(t,x,x_1,\cdots,x_N),\end{aligned} \tag{11}$$

式中 x_N 由式(10)给出,因此,哈密顿量 H 是 t, $x_0(=x)$, $x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, p_0, p_1, p_2, \cdots, p_{N-1}$ 的函数.

2 含高阶动力学的朗之万方程

在本章中,我们将基于 Zwanzig 方案[20−22], 导出含高阶动力学的朗之万方程.

考虑由高阶动力学粒子与谐振子热浴耦合的系统,其哈密顿量表示为

$$\mathcal{H}=H+H_B, \tag{12}$$

式中: $H=H(t,x,x_1,\cdots,x_{N-1},p_0,p_1,\cdots,p_{N-1})$ 表示高阶动力学粒子的哈密顿量(式 11); H_B 包含热浴中谐振子的哈密顿量及其与高阶动力学粒子的线性耦合相互作用,可以表示为[20]

$$H_B=\frac{1}{2}\sum_j\left[P_j^2+\omega_j^2\left(Q_j-\frac{\gamma_j}{\omega_j^2}x\right)^2\right]. \tag{13}$$

式(13)中已经取谐振子质量为单位质量. Q_j 和 P_j 是谐振子的广义坐标和广义动量; ω_j 是谐振子的频率; γ_j 表示振子与高阶动力学粒子的耦合强度.

将式(12)代入哈密顿方程,得到

$$\frac{\mathrm{d}Q_j}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_j}=P_j, \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_j}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial Q_j}=-\omega_j^2Q_j+\gamma_jx, \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_n}=\frac{\partial H}{\partial p_n}, \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_n}=-\frac{\partial H}{\partial x_n}+\delta_{n0}\sum_j\gamma_j\left(Q_j-\frac{\gamma_j}{\omega_j^2}x\right). \tag{17}$$

联立式(14)和(15)可以解出

$$Q_j = Q_j(0)\cos\omega_j t + P_j(0)\frac{\sin\omega_j t}{\omega_j} + \frac{\gamma_j}{\omega_j}\int_0^t \mathrm{d}s x(s)\sin\omega_j(t-s). \tag{18}$$

将式(18)最后一项进行分步积分,得到

$$Q_j - \frac{\gamma_j}{\omega_j^2}x = \left[Q_j(0) - \frac{\gamma_j}{\omega_j^2}x(0)\right]\cos\omega_j t + P_j(0)\frac{\sin\omega_j t}{\omega_j} - \frac{\gamma_j}{\omega_j^2}\int_0^t \mathrm{d}s x_1(s)\cos\omega_j(t-s). \tag{19}$$

将式(19)代入式(17),且考虑$n=0$以及式(11),得到

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial x} - \int_0^t \mathrm{d}sK(t-s)x_1(s) + \xi(t), \tag{20}$$

式中函数$K(t)$和$\xi(t)$的表达式分别为

$$K(t) = \sum_j \frac{\gamma_j^2}{\omega_j^2}\cos\omega_j t, \tag{21}$$

$$\xi(t) = \sum_j \gamma_j P_j(0)\frac{\sin\omega_j t}{\omega_j} + \sum_j \gamma_j\left[Q_j(0) - \frac{\gamma_j}{\omega_j^2}x(0)\right]\cos\omega_j t. \tag{22}$$

将式(8)代入式(20),得到

$$\sum_{n=0}^{N}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\frac{\partial L}{\partial x_n} - \int_0^t \mathrm{d}sK(t-s)x_1(s) + \xi(t) = 0. \tag{23}$$

我们将式(23)称为含高阶动力学的广义朗之万方程.

假定热浴初始处于温度为T的平衡态,分布函数满足

$$\rho_{eq}(Q_j(0), P_j(0)) \propto \mathrm{e}^{-H_B/k_BT}, \tag{24}$$

不难得到

$$\langle P_j(0)\rangle = 0, \left\langle Q_j(0) - \frac{\gamma_j}{\omega_j^2}x(0)\right\rangle = 0, \tag{25}$$

$$\langle P_j(0)P_k(0)\rangle = k_B T\delta_{jk}, \tag{26}$$

$$\left\langle\left[Q_j(0) - \frac{\gamma_j}{\omega_j^2}x(0)\right]\left[Q_k(0) - \frac{\gamma_k}{\omega_k^2}x(0)\right]\right\rangle = \frac{k_B T}{\omega_k^2}\delta_{jk}, \tag{27}$$

$$\left\langle P_j(0)\left[Q_k(0) - \frac{\gamma_k}{\omega_k^2}x(0)\right]\right\rangle = 0, \tag{28}$$

将式(25)代入式(22),我们得到

$$\langle\xi(t)\rangle = 0, \tag{29}$$

此式与朗之万方程(1)中噪声项满足的式(2)相同.利用式(21)、(22)和(26)~(28),可以得到涨落-耗散定理[20]

$$\langle\xi(t)\xi(s)\rangle = k_B T K(t-s). \tag{30}$$

对于连续谱的情况,假定谱密度为$g(\omega)$,则式(21)中对j的求和可以用积分取代.函数$K(t)$可以进一步表示为

$$K(t) = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega g(\omega)\frac{\gamma^2(\omega)}{\omega^2}\cos\omega t. \tag{31}$$

如果$g(\omega)$正比于ω^2,且$\gamma(\omega)$为常量,则式(31)积分给出

$$K(t) \propto \delta(t); \tag{32}$$

如果取比例系数为2μ,即$K(t) = 2\mu\delta(t)$,则式(30)变为

$$\langle\xi(t)\xi(s)\rangle = 2\mu k_B T\delta(t-s), \tag{33}$$

式(33)与式(3)具有相同的形式.δ函数是偶函数,且当$s \neq t$时,$\delta(t-s) = 0$,因此

$$\int_0^t \mathrm{d}s\delta(t-s)x_1(s) = \int_t^\infty \mathrm{d}s\delta(t-s)x_1(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}s\delta(t-s)x_1(s) = \frac{1}{2}x_1(t), \tag{34}$$

这样式(23)化简为

$$\sum_{n=0}^{N}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\frac{\partial L}{\partial x_n} - \mu x_1 + \xi(t) = 0. \tag{35}$$

我们将式(35)称为含高阶动力学的狭义朗之万方程.此式相对于拉格朗日方程(5),增加了阻尼项$-\mu x_1$和噪声项$\xi(t)$.相对于原朗之万方程(1),将$m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$换成了$-\sum_{n=1}^{N}(-\mathrm{d}/\mathrm{d}t)^n\partial L/\partial x_n$(即$\mathrm{d}p_0/\mathrm{d}t$),将力$F$换成了$\partial L/\partial x_0$.

作为特例,我们讨论$N=1$的情形,此时动力学是我们熟悉的二阶动力学(即牛顿力学).假定$L = (m/2)x_1^2 - V(t,x)$,注意到$x_1 = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$以及$x_0 = x$,由式(35)可以导出

$$-m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\partial V}{\partial x} - \mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \xi(t) = 0. \tag{36}$$

对于有势力$F = -\partial V/\partial x$,式(36)回到原朗之万方程(1).

3 高阶动力学对应的福克-普朗克方程

在非平衡统计力学中,存在与朗之万方程(36)对应的福克-普朗克方程,用以描述相空间的分布函数的演化行为.本章将推导含高阶动力学的狭义朗之

万方程(35)对应的福克-普朗克方程.

根据式(16)、(17)、(20)和(35), 可以写出相空间 $\{\boldsymbol{\Gamma}\}=\{(x_0,x_1,\cdots,x_{N-1};p_0,p_1,\cdots,p_{N-1})\}$中轨迹的演化方程

$$\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=x_{n+1}, \tag{37}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial L}{\partial x_n}-p_{n-1}+\delta_{n0}\xi(t), \tag{38}$$

这里 $n=0, 1, 2, \cdots, N-1$. 在式(38)中, 我们已经约定 $p_{-1}=\mu x_1$, 且 x_N 由式(10)表示.

以 $f(t,\boldsymbol{\Gamma})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Gamma}$表示粒子在相空间区域$\boldsymbol{\Gamma}$至$\boldsymbol{\Gamma}+\mathrm{d}\boldsymbol{\Gamma}$内出现的概率. 根据流守恒方程, 可以得到[23]

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{\partial(\dot{x}_n f)}{\partial x_n}+\frac{\partial(\dot{p}_n f)}{\partial p_n}\right], \tag{39}$$

式中 $\dot{x}_n=\mathrm{d}x_n/\mathrm{d}t$以及 $\dot{p}_n=\mathrm{d}p_n/\mathrm{d}t$. 利用式(37)和(38), 可将方程(39)改写为

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\sum_{n=0}^{N-1}\left\{\frac{\partial}{\partial x_n}(x_{n+1}f)+\frac{\partial}{\partial p_n}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_n}-p_{n-1}\right)f\right]\right\}-\xi(t)\frac{\partial f}{\partial p_0}. \tag{40}$$

将 f 对噪声做平均, 即得到相空间的分布函数

$$\rho(t,\boldsymbol{\Gamma})=\langle f(t,\boldsymbol{\Gamma})\rangle_{\xi}. \tag{41}$$

仿照 Reichl 从朗之万方程导出福克-普朗克方程的思路[23], 由式(40)和(41)可以导出含高阶动力学的朗之万方程(35)[或等价的式(37)和(38)]对应的福克-普朗克方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\mu k_{\mathrm{B}}T\frac{\partial^2\rho}{\partial {p_0}^2}-\sum_{n=0}^{N-1}\left\{\frac{\partial}{\partial x_n}(x_{n+1}\rho)+\frac{\partial}{\partial p_n}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_n}-p_{n-1}\right)\rho\right]\right\}. \tag{42}$$

作为特例, 讨论 $N=1$ 的情形, 此时动力学是我们熟悉的二阶动力学(即牛顿力学). 假定$L=(m/2)x_1^2-V(t,x)$. 由式(9)得到$p_0=mx_1$, 故$x_1=p_0/m$, $p_{-1}=\mu x_1=\mu p_0/m$以及$L=p_0^2/2m-V(t,x)$. 代入式(42)得到

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{p_0}{m}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial p_0}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\mu p_0}{m}\right)\rho\right]+\mu k_{\mathrm{B}}T\frac{\partial^2\rho}{\partial {p_0}^2}, \tag{43}$$

此即式(36)对应的福克-普朗克方程[23].

4　随机 Pais-Uhlenbeck 振子

作为例子, 我们考虑 Pais-Uhlenbeck 振子[6]与普通的谐振子热浴耦合的情形.

Pais-Uhlenbeck 振子的拉格朗日量可以表示为[6, 16]

$$L=\frac{Y}{2}[x_2^2-(\omega_1^2+\omega_2^2)x_1^2+\omega_1^2\omega_2^2x^2], \tag{44}$$

这里 Y是常量, 频率ω_1、ω_2不依赖于时间. 式(44)中的L对应于$N=2$ 的情形, 动力学方程是四阶的. 将式(44)代入式(35), 得到

$$Y\left[\frac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}+(\omega_1^2+\omega_2^2)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_1^2\omega_2^2x\right]-\mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\xi(t)=0, \tag{45}$$

式(45)既包含了阻尼项$-\mu\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, 也包含了噪声项$\xi(t)$. 我们将式(45)描述的振子称为随机 Pais-Uhlenbeck 振子.

就笔者所知, Nesterenko 最早讨论了仅包含阻尼项的 Pais-Uhlenbeck 振子[24], 而 Urenda-Cázares 等人讨论了包含噪声项的 Pais-Uhlenbeck 振子[25]. 他们唯象地写出了相应的方程, 但没有从微观上给出推导. 我们恰好弥补了这一不足.

根据式(9)得到 $p_1=Yx_2$, 故 $x_2=p_1/Y$以及 $L=\dfrac{p_1^2}{2Y}+\dfrac{Y}{2}[\omega_1^2\omega_2^2x^2-(\omega_1^2+\omega_2^2)x_1^2]$. 代入式(42)得到随机 Pais-Uhlenbeck 振子对应的福克-普朗克方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-x_1\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{p_1}{Y}\frac{\partial\rho}{\partial x_1}-(Y\omega_1^2\omega_2^2x-\mu x_1)\frac{\partial\rho}{\partial p_0}+[Y(\omega_1^2+\omega_2^2)x_1+p_0]\frac{\partial\rho}{\partial p_1}+\mu k_{\mathrm{B}}T\frac{\partial^2\rho}{\partial {p_0}^2}. \tag{46}$$

根据式(11)可以写出 Pais-Uhlenbeck 振子的哈密顿量为

$$H=p_0x_1+\frac{p_1^2}{2Y}+\frac{Y}{2}[(\omega_1^2+\omega_2^2)x_1^2-\omega_1^2\omega_2^2x^2]. \tag{47}$$

不难验证, 玻耳兹曼分布$\rho_s\propto\mathrm{e}^{-H/k_{\mathrm{B}}T}$是福克-普朗克方程的解. 因此, 尽管哈密顿量($H$)无下界, 但仍然存在稳态分布$\rho_s\propto\mathrm{e}^{-H/k_{\mathrm{B}}T}$. 至于这个分布是否稳定, 需要进一步探讨.

5　结论

本文讨论了与谐振子热浴耦合的高阶动力学粒子的运动行为, 导出了含高阶动力学的朗之万方程(35)及其对应的福克-普朗克方程(42). 作为例子, 我们考虑了随机 Pais-Uhlenbeck 振子, 给出了相应的朗之万方程(45)及其对应的福克-普朗克方程(46). 这些方程可以作为研究高阶动力学粒子布朗运动的出发点. 需要指出的是, 在上述讨论中, 描述热浴中谐振子的动力学仍旧是二阶的. 如果将谐振子的动力学换成高阶的, 例如换成 Pais-Uhlenbeck 振子, 上述结

果是否仍旧可以保持,需要后续讨论. 此外,本文仅仅讨论了单自由度系统. 对于多自由度情形,本文的推导思路仍然有效,关键方程(35)和(42)的形式保持不变,只需要将其中的广义坐标和广义动量理解成矢量即可.

随机热力学是近年来为描述小系统的热力学行为而衍生的前沿研究方向. 当前的随机热力学[26–28]主要基于常规的朗之万方程(36)及其对应的福克-普朗克方程(43)构建,功、热、熵均能被很好地定义. 本文导出了含高阶动力学的朗之万方程及其对应的福克-普朗克方程. 基于这两个方程,将现有的随机热力学拓展到包含高阶动力学的情形,是十分有价值的问题. 核心难点在于如何恰当地定义功、热、熵. 对随机过程的描述除了朗之万方程和福克-普朗克方程外,还可以用路径积分来描述. 我们注意到, Kleinert 讨论了 Pais-Uhlenbeck 振子的路径积分问题[29]; Dean 等人讨论了二次型高阶动力学的路径积分问题[30]. 在这 2 种情形下,可以得到传播子的解析解. 尽管一般情形下难以得到解析解,但是仍旧可以借用路径积分思想,考虑高阶动力学,来拓展随机热力学框架. 我们将在后续工作中进一步讨论这一问题.

致谢: 感谢赵秀花阅读全文并提出修改意见.

6 参考文献

[1] OSTROGRADSKY M V. Mémoires sur les équations différentielles relatives au problème des isopèrimétres [J]. Mémoires Académie Saint-Pétersbourg, 1850, 6: 385

[2] ABRAHAM M. Theorie der elektrizität: elektromagnetische theorie der strahlung [M]. Berlin: Teubner, 1905

[3] DIRAC P A. Classical theory of radiating electrons[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1938, 167(929): 148

[4] BHABHA H J. Classical theory of mesons[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1939, 172(950): 384

[5] 张宗燧. 质点的经典运动 [J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 1956, 1(1): 1

[6] PAIS A, UHLENBECK G E. On field theories with non-localized action[J]. Physical Review, 1950, 79(1): 145

[7] 张宗燧. 含有高次微商的量子理论 [J]. 物理学报, 1958, 14(4): 300

[8] PODOLSKY B. A generalized electrodynamics part I: non-quantum[J]. Physical Review, 1942, 62(1/2): 68

[9] PODOLSKY B, KIKUCHI C. A generalized electrodynamics part Ⅱ: quantum[J]. Physical Review, 1944, 65(7/8): 228

[10] POLYAKOV A. Fine structure of strings[J]. Nuclear Physics B, 1986, 268(2): 406

[11] STELLE K S. Classical gravity with higher derivatives[J]. General Relativity and Gravitation, 1978, 9(4): 353

[12] SIMON J Z. Stability of flat space, semiclassical gravity, and higher derivatives[J]. Physical Review D, 1991, 43(10): 3308

[13] HAWKING S W, HERTOG T. Living with ghosts[J]. Physical Review D, 2002, 65(10): 103515

[14] MANNHEIM P D. Alternatives to dark matter and dark energy[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2006, 56(2): 340

[15] TIMOSHENKO S P. LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1921, 41(245): 744

[16] BENDER C M, MANNHEIM P D. No-ghost theorem for the fourth-order derivative Pais-Uhlenbeck oscillator model[J]. Physical Review Letters, 2008, 100(11): 110402

[17] BENDER C M, MANNHEIM P D. Exactly solvable PT-symmetric Hamiltonian having no Hermitian counterpart[J]. Physical Review D, 2008, 78(2): 025022

[18] DE MEDEIROS W P F, MÜLLER D. On the order reduction[J]. The European Physical Journal C, 2021, 81(3): 231

[19] Langevin P. Sur la théorie du mouvement Brownian[J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1908, 146(3): 530

[20] ZWANZIG R. Nonlinear generalized Langevin equations[J]. Journal of Statistical Physics, 1973, 9(3): 215

[21] FORD G W, KAC M, MAZUR P. Statistical mechanics of assemblies of coupled oscillators[J]. Journal of Mathematical Physics, 1965, 6(4): 504

[22] 包景东. 经典和量子耗散系统的随机模拟方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2009

[23] REICHL L E. A modern course in statistical physics[M]. New York: Wiley, 1998

[24] NESTERENKO V V. Instability of classical dynamics in theories with higher derivatives[J]. Physical Review D, 2007, 75(8): 087703

[25] URENDA-CÁZARES E, ESPINOZA P B, GALLEGOS A, et al. The noisy Pais-Uhlenbeck oscillator[J]. Journal of Mathematical Chemistry, 2019, 57(5): 1314

[26] SEKIMOTO K. Stochastic energetics[M]. Berlin: Springer, 2010

[27] SEIFERT U. Stochastic thermodynamics, fluctuation theorems and molecular machines[J]. Reports on Progress in Physics, 2012, 75(12): 126001

[28] LI G, TU Z C. Stochastic thermodynamics with odd

controlling parameters[J]. Physical Review E, 2019, 100: 012127

[29] KLEINERT H. Path integral for second-derivative Lagrangian $L=(\kappa/2)\ddot{x}^2+(m/2)\dot{x}^2+(k/2)x^2-j(\tau)x(\tau)$[J]. Journal of Mathematical Physics, 1986, 27(12): 3003

[30] DEAN D S, MIAO B, PODGORNIK R. Path integrals for higher derivative actions[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2019, 52(50): 505003

Brownian motion with high-derivative dynamics

TU Zhanchun

(Department of Physics, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract Brownian motion with higher-derivative dynamics is investigated in this work. As a model, we consider a particle coupling with a heat bath consisting of harmonic oscillators. Assume that motion of particle without bath is determined by a Lagrangian $L=L(t,x,x_1,\cdots,x_N)$ where x_n ($n=1,2,\cdots,N$) is the n-th order derivative of x with respect to time t. After integrating variables of bath, we derived a generalized Langevin equation for Brownian motion as follows:

$$\sum_{n=0}^{N}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\frac{\partial L}{\partial x_n}-\mu x_1+\xi(t)=0,$$

where μ represents effective constant of viscosity and $\xi(t)$ is Gaussian noise. Note that we set $x_0=x$ in the above equation.

Define $p_{N-1}=\dfrac{\partial L(t,x,x_1,\cdots,x_N)}{\partial x_N}$. From this equation, we can solve x_N and express it as a function $x_N=\varphi(t,x,x_1,\cdots,p_{N-1})$. The Fokker-Planck equation corresponding to generalized Langevin equation is derived, which may be expressed as

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\sum_{n=0}^{N-1}\left\{\frac{\partial}{\partial x_n}(x_{n+1}\rho)+\frac{\partial}{\partial p_n}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_n}-p_{n-1}\right)\rho\right]\right\}+\mu k_{\mathrm{B}}T\frac{\partial^2\rho}{\partial {p_0}^2},$$

where $\rho=\rho(t,x,x_1,\cdots,x_{N-1},p_0,p_1,\cdots,p_{N-1})$ is the distribution function in phase space. T is temperature of the bath. Note that we set $p_{-1}=\mu x_1$ and replace x_N with a function of $t,x,x_1,\cdots,p_{N-1}$ in the above equation.

As an example, we consider Pais-Uhlenbeck oscillator whose Lagrangian is

$$L=\frac{Y}{2}[x_2^2-(\omega_1^2+\omega_2^2)x_1^2+\omega_1^2\omega_2^2x^2],$$

where Y is a constant, and frequencies ω_1,ω_2 are independent of time. The corresponding Langevin equation and Fokker-Planck equation are

$$Y\left[\frac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}+(\omega_1^2+\omega_2^2)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_1^2\omega_2^2x\right]-\mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\xi(t)=0,$$

and

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-x_1\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{p_1}{Y}\frac{\partial\rho}{\partial x_1}-(Y\omega_1^2\omega_2^2x-\mu x_1)\frac{\partial\rho}{\partial p_0}+[Y(\omega_1^2+\omega_2^2)x_1+p_0]\frac{\partial\rho}{\partial p_1}+\mu k_{\mathrm{B}}T\frac{\partial^2\rho}{\partial {p_0}^2},$$

respectively.

Keywords high-derivative dynamics; Brownian motion; Langevin equation; Fokker-Planck equation

【责任编辑：刘先勤】