

不同噪声环境中量子精密测量及其量子模拟实验 检验的研究进展^{*}

艾清^{1)†} 王洋洋^{2,3)} 邱静⁴⁾

(1)北京师范大学物理学系, 100875, 北京; (2)陕西省可控中子源工程技术研究中心, 西京学院电子信息学院, 710123, 陕西西安; (3)陕西省可控中子源应用技术国际联合研究中心, 西京学院电子信息学院, 710123, 陕西西安;
(4)西南技术物理研究所, 610041, 四川成都)

摘要 量子精密测量利用量子纠缠和量子相干性提高测量精度. 本文简要回顾了在各种噪声环境中的量子精密测量方案, 包括非马尔科夫噪声、关联噪声、双光子噪声环境等. 另外, 量子信息的蓬勃发展让我们能够设计和利用相应的量子模拟实验, 从而检验各种量子精密测量理论方案的实验可行性.

关键词 量子精密测量; 开放量子系统; 非马尔科夫; 量子芝诺效应; 量子相变; 量子模拟

中图分类号 O413

DOI: 10.12202/j.0476-0301.2023190

0 引言

量子精密测量利用量子纠缠和量子相干性提高测量精度^[1-2]. 以 Ramsey 干涉实验为例, 把量子系统初始制备在一个叠加态 $|\psi(0)\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ 上, 然后自由演化到 $|\psi(t)\rangle = (|0\rangle + e^{i\phi(t)}|1\rangle)/\sqrt{2}$, 通过测量相位 $\phi(t)$ 达到测量频率的目的. 根据中心极限定理, 如果使用 n 个相同的粒子, 彼此之间无相互作用, 并独立测量, 其测量误差正比于 $n^{-1/2}$, 即标准量子极限^[2]. 为了提高测量精度, 一般使用 n 个相同粒子的最大纠缠态, 当没有噪声时其测量精度在理论上限正比于 n^{-1} , 即海森堡极限^[2]. 一般而言, 由于量子系统与环境的相互作用, 会导致量子系统发生退相干效应^[3]. 在马尔科夫的纯退相位噪声作用下, 如果使用最大纠缠态, 其测量误差与标准量子极限相同, 虽然所需测量时间更短^[4]. 在本文中, 我们采用文献[5]中定义, 对于马尔科夫噪声, 其退相位速率是常数; 而对于非马尔科夫噪声, 其退相位速率是时间的函数. 由于薛定谔方程的么正性, 开放量子系统中初态短时的存活概率总是呈高斯型随时间衰减, 此时退相干速率正比于时间, 即广义量子芝诺效应^[6-8] (一般量子芝诺效应是指频繁测量会冻结量子系统的演化, 使其维持在初态上, 在开放量子系统和封闭量子系统中都存在量子芝诺效应, 它与量子系统是否和环境相互作用无关).

在这样的非马尔科夫噪声中^[9], 测量误差正比于 $n^{-3/4}$, 即芝诺极限^[5]. 除了独立热库, 在离子阱系统中不同量子比特感受到的噪声之间还存在关联, 这启发何宛亭等人考虑引进辅助量子比特抵消噪声的影响, 从而接近无噪声的情况^[10]. 此外, 当环境的能谱是有限宽, 它与被测量量子比特满足某种特定要求时, 开放量子系统存在孤立的能级, 即束缚态, 利用束缚态进行精密测量, 可以达到无噪声的海森堡极限^[11].

众所周知, 量子临界系统, 例如量子 Rabi 模型和 Lipkin-Meshkov-Glick(LMG)模型的物理性质在相变点附近对序参量的变化非常敏感; 因此, 量子临界现象被用于设计量子精密测量方案. 其中一种方案是构造等间距的能谱结构, 如果被测物理量对应的 Fisher 信息反比于体系的能隙, 当量子相变发生时, 由于能隙的消失导致量子 Fisher 信息发散^[12], 从而使测量误差趋近于 0, 且被数值证明量子临界增强的精密测量对于单光子耗散是鲁棒的. 其中单光子耗散是实验和理论研究中常见的耗散形式. 但是, 近年来有实验研究人员在超导量子系统实验中演示了双光子耗散的可能性, 并发现它会保留量子 Rabi 模型的 Z_2 对称性^[13-14]. He 等^[15]发现, 双光子耗散所具有的非线性会破坏量子 Rabi 模型的等间距能级结构, 从而导致量子临界增强的精密测量的物理基础失效.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(11674033, 11505007); 北京市自然科学基金资助项目(1202017); 北京师范大学青年教师发展基金资助项目(2022129); 陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2023-JC-QN-0092)

[†] 通信作者: 艾清(1981—), 男, 副教授. 研究方向: 量子物理与量子信息、量子生物学、量子精密测量. E-mail: aiqing@bnu.edu.cn
收稿日期: 2023-05-05

另一方面,最近 20 年以来,量子信息与量子计算研究取得了蓬勃发展.量子计算由于量子纠缠与量子相干性可以指数加快开放量子系统严格模拟过程^[16].因此,我们提出可以用量子计算机检验各种量子精密测量理论方案的实验可行性^[10],并进行了实验展示^[17].

1 开放量子系统与量子精密测量

1.1 开放量子系统 与环境存在相互作用的系统被称为开放量子系统.其量子动力学由系统哈密顿量和环境的关联函数共同决定,其中环境被描述成无穷多个谐振子模式.以纯退相位噪声为例,其总哈密顿量为^[3, 10]

$$H = H_S + H_B + H_{SB}, \quad (1)$$

式中: $H_S = \sum_{i=1}^n \omega_0 \sigma_i^z / 2$ 是系统哈密顿量; $H_B = \sum_k \sum_{i=1}^n \omega_k a_{ik}^+ a_{ik}$ 是环境哈密顿量; $H_{SB} = \sum_k \sum_{i=1}^n g_{ik} \sigma_i^z (a_{ik}^+ + a_{ik})$ 是系统与环境相互哈密顿量.这里, ω_0 是量子比特的能级差, σ_i^z 是第 i 个量子比特的 Pauli 矩阵, a_{ik}^+ (a_{ik}) 是第 i 个量子比特热库的第 k 个谐振子模式的升(降)算符, ω_k 是其本征频率, g_{ik} 是其与第 i 个量子比特的耦合系数.在本文中,为了简单起见,我们假设 $\hbar = 1$.

开放量子系统的动力学演化一般近似用 Lindblad 形式量子主方程近似描述^[3, 10],即

$$\dot{\rho} = i[\rho, H_S] + \sum_{i,j=1}^n C_{ij}(t) \left(\sigma_j^z \rho \sigma_i^z - \frac{1}{2} \{ \sigma_i^z \sigma_j^z, \rho \} \right), \quad (2)$$

式中: ρ 是系统的密度矩阵; $C_{ij}(t)$ 是第 i 个量子比特和第 j 个量子比特的关联退相位速率; $\{A, \rho\} = A\rho + \rho A$ 是反对易子.这里,关联退相位速率是环境关联函数的实部对时间的积分,即

$$C_{ij}(t) = \text{Re} \left\{ \int_0^t d\tau \sum_k \langle g_{ik}^2 [a_{ik}^+(\tau) + a_{ik}^-(\tau)] [a_{jk}(0) + a_{jk}^-(0)] \rangle \right\}. \quad (3)$$

关联退相位速率对时间的积分即关联线性函数

$$g_{ij}(t) = \int_0^t d\tau C_{ij}(\tau). \quad (4)$$

在实验中,一般常见 n 个全同的独立热库模型,即 $C_{ij}(t) = \delta_{ij} \gamma(t)$, $g_{ij}(t) = \delta_{ij} \int_0^t d\tau \gamma(\tau)$, 其中 $\gamma(t)$ 是单个量子比特的退相位速率,式(2)简化为

$$\dot{\rho} = i[\rho, H_S] + \sum_{j=1}^n \gamma(t) \left(\sigma_j^z \rho \sigma_j^z - \frac{1}{2} \{ \sigma_j^z \sigma_j^z, \rho \} \right). \quad (5)$$

而在离子阱实验中,由于磁噪声一般会导致所有量子比特的退相位之间存在关联,这可以用完全关联热库模型描述,即 $C_{ij}(t) = \gamma(t)$, $g_{ij}(t) = \int_0^t d\tau \gamma(\tau)$, 式(2)简化为

$$\dot{\rho} = i[\rho, H_S] + \sum_{i,j=1}^n \gamma(t) \left(\sigma_j^z \rho \sigma_i^z - \frac{1}{2} \{ \sigma_i^z \sigma_j^z, \rho \} \right). \quad (6)$$

在推导马尔科夫主方程的过程中^[3],一般需要通过微扰论,将系统与环境相互作用近似到二阶.然后做玻恩近似,假设系统与环境相互作用对环境几乎没有反作用.再做马尔科夫近似,不考虑环境的记忆效应.最后做久期近似,丢掉快变量.如果不做马尔科夫近似,得到的即是非马尔科夫主方程.而至于开放量子系统的动力学演化的严格计算,采用较多的是级联运动方程^[18],但是其计算复杂度会随着系统的维度和环境关联函数中 e 指数项个数呈指数增加.最近,我们提出了一个量子算法,可以指数加快级联运动方程的严格模拟,且计算的复杂度并不受环境关联函数的复杂度影响^[16].其具体形式,我们将在第 5 章进行详述.

1.2 量子精密测量 以 Ramsey 干涉实验为例,介绍量子精密测量的基本原理^[10].对于一个 n 量子比特系统,首先将系统制备在最大纠缠态 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 态上,即 $|\psi(0)\rangle = (|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n}) / \sqrt{2}$. $|0\rangle^{\otimes n}$ 、 $|1\rangle^{\otimes n}$ 分别表示 n 个量子比特都处于 $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$.然后让系统在哈密顿量

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \omega_0 \sigma_i^z \quad (7)$$

作用下演化一段时间 t , 最后发现目标态概率与 $|0\rangle^{\otimes n}$ 和 $|1\rangle^{\otimes n}$ 之间的相对相位存在关系

$$P_0(t) = \frac{1}{2} [1 + e^{-\sum_{ij} g_{ij}(t)} \cos(n\omega_0 t)]. \quad (8)$$

结合比特数 n 和演化时间 t , 根据测量结果可以得出单个比特的跃迁频率 ω_0 , 其方差为

$$\delta\omega_0^2 = \frac{1 - e^{-\sum_{ij} g_{ij}(t)} \cos^2(n\omega_0 t)}{nT e^{-\sum_{ij} g_{ij}(t)} \sin^2(n\omega_0 t)}, \quad (9)$$

式中 T 是总测量时间.

当系统与环境没有相互作用,即量子闭系统时, $\gamma(t) = 0$, 测量频率的方差为

$$\delta\omega_0^2 = \frac{1}{nTt}, \quad (10)$$

达到测量精度的海森堡极限,即当测量时间 T 和 t 趋

近无穷时, 测量误差可以趋近于 0.

当系统与环境存在相互作用, 对于独立热库模型, 且退相位速率不依赖于时间, 即马尔科夫噪声, 此时 $C_{ij}(t) = \delta_{ij}\gamma(t) = \delta_{ij}C$, 其中 C 是一个常数, 测量频率的方差为

$$\delta\omega_0^2 = \frac{1 - e^{-nCt} \cos^2(n\omega_0 t)}{nTte^{-nCt} \sin^2(n\omega_0 t)}. \quad (11)$$

其极小值可以通过 $n\omega_0 t = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ (k 是整数) 和 $nCt = 1$ 确定为 $\delta\omega_0^2 = Ce/Tt$, 即测量误差与所用量子比特数 n 无关. 也就证明了, 在马尔科夫噪声中, 使用最大纠缠态, 相对于直积态并不会降低测量误差, 但是可以缩短最优测量时间, 见图 1. 当然, 数值计算表明, 在马尔科夫环境中使用部分纠缠态, 其测量精度相对于无纠缠态可以有适度提高^[4], 换句话说最大纠缠态并不是最优测量初始态.

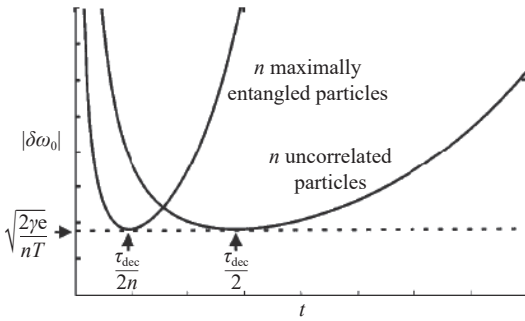


图 1 马尔科夫噪声下, 初始态分别为 n 量子比特最大纠缠态与直积态的测量误差动力学^[4]

在关联的马尔科夫噪声中, $C_{ij}(t) = \gamma(t) = C$ 是一个常数, 测量频率的方差为

$$\delta\omega_0^2 = \frac{1 - e^{-n^2 Ct} \cos^2(n\omega_0 t)}{nTte^{-n^2 Ct} \sin^2(n\omega_0 t)}. \quad (12)$$

其极小值可以通过 $n\omega_0 t = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ (k 是整数) 和 $n^2 Ct = 1$ 确定为 $\delta\omega_0^2 = nCe/Tt$. 也就是说, 在关联的热库中, 对于马尔科夫噪声, 使用 n 量子比特最大纠缠态, 不但不会提高测量精度, 反倒会增加误差.

2 非马尔科夫噪声与芝诺极限

在独立热库中, 当退相位速率是时间的函数, 即非马尔科夫噪声. 例如, $\gamma(t) = Ct$, 测量频率的方差为

$$\delta\omega_0^2 = \frac{1 - e^{-nCt^2/2} \cos^2(n\omega_0 t)}{nTte^{-nCt^2/2} \sin^2(n\omega_0 t)}. \quad (13)$$

其极小值可以通过 $n\omega_0 t = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ (k 是整数) 和 $nCt^2 = 1$ 确定为 $\delta\omega_0^2 = \sqrt{2Ce/nT^2}$, 即测量误差反比于所

用量子比特数 $n^{1/4}$, 此时测量误差下限即芝诺极限^[5].

总结以上发现可知, 在马尔科夫噪声中, 使用最大纠缠态和直积态 2 种测量的精度相同; 当退相位速率正比于时间, 使用最大纠缠态相比于直积态, 其测量的精度提高 $r=n^{1/4}$ 倍; 当没有噪声时, 相对于直积态, 使用最大纠缠态可以使测量误差减小为前者的 $1/\sqrt{n}$. 这些结果可以形象地表示为图 2.

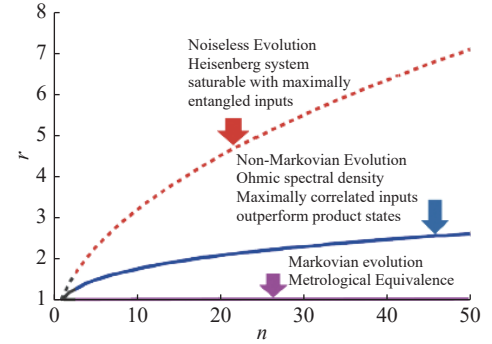


图 2 无噪声、非马尔科夫噪声、马尔科夫噪声下使用最大纠缠态提高的测量精度倍数 r 与量子比特数 n 的关系^[5]

3 量子临界增强的精密测量

3.1 动力学框架 2021 年, 蔡建明等人提出一种基于量子临界的精密测量的动力学框架^[12]. 他们发现, 在量子 Rabi 模型中, 当发生量子相变时, 体系的等间距能谱的能隙会消失, 此时刻画测量误差的 Fisher 信息会发散, 从而导致被测量方差趋近于 0.

设系统的哈密顿量为

$$H_\lambda = H_0 + \lambda H_1, \quad (14)$$

式中 λ 是待测参数. 定义 $\widehat{C} = -i[H_0, H_1]$, $\widehat{D} = -i[H_\lambda, \widehat{C}]$, $\widehat{\Lambda} = i\Delta\widehat{C} - \widehat{D}$, $|\mu\rangle$ 是 H_λ 的本征态对应本征值 μ . 如果

$$\Delta\widehat{\Lambda} = [\widehat{H}_\lambda, \widehat{\Lambda}], \quad (15)$$

可以证明 $\widehat{\Lambda}|\mu\rangle$ ($\widehat{\Lambda}^+|\mu\rangle$) 也是 H_λ 的本征态对应本征值 $\mu + \Delta$ ($\mu - \Delta$), 即 H_λ 的能谱是等间距的. 初始时刻, 系统被制备在量子态 $|\psi\rangle$ 上, 其量子 Fisher 信息随时间的演化为

$$I_\lambda(t) \approx 4 \frac{[\sin(\Delta t) - \Delta t]^3}{\Delta^6} [\langle \psi | D^2 | \psi \rangle - \langle \psi | D | \psi \rangle^2]. \quad (16)$$

当趋近于相变点, 且保持 Δt 为常数时, $I_\lambda(t)$ 会发散, 此时测量 λ 的误差趋近于 0.

以量子 Rabi 模型为例, 其哈密顿量为

$$H_R = \omega a^\dagger a + \frac{\Omega}{2} \sigma_z - \lambda(a^\dagger + a)\sigma_x, \quad (17)$$

式中: $a^\dagger$ (a) 是频率为 ω 的单模玻色子的升(降)算符;

Ω 是二能级原子的能级劈裂; λ 是原子与玻色子的耦合强度; σ_α ($\alpha = x, y, z$)是泡利矩阵. 当原子的能级劈裂远大于玻色子频率时, 即 $\eta = \frac{\Omega}{\omega} \rightarrow \infty$, 原子与玻色子解耦并为玻色子提供一个有效场, 有效哈密顿量表示为

$$H_{\text{np}}^{\text{I}} = \omega a^\dagger a + \frac{\omega g^2}{4} (a^\dagger + a)^2, \quad (18)$$

式中 $g = \frac{2\lambda}{\sqrt{\omega\Omega}}$ 是量纲一的耦合强度. 当 $g \rightarrow 1$ 时, 发生从普通相到超辐射相的量子相变^[19]. 初始时刻, 玻色子被制备在量子态 $|\phi\rangle$ 上, 其量子 Fisher 信息随时间的演化为

$$I_g(t) \approx 16g^2 \frac{[\sin(\Delta_g \omega t) - \Delta_g \omega t]^3}{\Delta_g^6} \left[\langle \phi | p^4 | \phi \rangle - \langle \phi | p^2 | \phi \rangle^2 \right], \quad (19)$$

这里 $\Delta_g = 2\sqrt{1-g^2}$ 是量纲一的能隙, $p = i(a^\dagger - a)$ 是正则动量. 当发生量子临界现象时, $I_g(t)$ 会发散, 即测量 g 的误差无穷小.

3.2 噪声敏感性 首先, 考虑在开放量子系统中常见的单光子耗散, 文献 [15] 第一次给出了量子 Rabi 模

型中存在单光子耗散时, 测量误差的解析表达式. 在图 3-a 中展示了 $F_g(t)$ 的动力学演化, 可见 $F_g(t)$ 做周期性振荡, 其振幅先随时间快速增加到极大, 然后缓慢减小. 而且当 g 趋近于相变点时, 其最大振幅单调增加. 尤其值得注意的是, 对于不同 g , $F_g(t)$ 都是以 $\Delta_g \omega$ 作为频率进行振荡. 在图 3-b 中, 进一步发现 $F_g(t)$ 的最大值 $F_g(t)|_{\text{max}}$ 与能隙 Δ_g 之间呈幂律关系 $F_g(t)|_{\text{max}} = a\Delta_g^b$, 随着 Δ_g 的减小, 即靠近相变点, $F_g(t)|_{\text{max}}$ 会发散. 而且, 虽然随着耗散变强, $F_g(t)|_{\text{max}}$ 会显著减小, 对于不同的耗散强度, 幂指数都大约是 $b = -1.2$.

然后, 在图 4 中考察温度对 $F_g(t)$ 的影响. 图 4-a 呈现了不同平均声子数 $\bar{n}$ 时 $F_g(t)$ 的动力学演化, 可见 $F_g(t)$ 仍然做周期性振荡, 只是随着 $\bar{n}$ 的增加, $F_g(t)$ 的最大值 $F_g(t)|_{\text{max}}$ 很快减小. 在图 4-b 中, 我们发现 $F_g(t)|_{\text{max}}$ 与温度之间也满足幂律关系 $F_g(t)|_{\text{max}} = aT^b$, 其中 $b \approx -1$, 表明量子临界增强的精密测量在低温时是鲁棒的.

最后, 通过数值计算考虑双光子耗散下的方案鲁棒性, 在图 5-b 中, 我们发现 $F_g(t)$ 的最大值 $F_g(t)|_{\text{max}}$ 与能隙 Δ_g 之间虽然仍然满足幂律关系 $F_g(t)|_{\text{max}} = a\Delta_g^b$, 但是随着 Δ_g 的减小, $F_g(t)|_{\text{max}}$ 会减小, 即越靠近

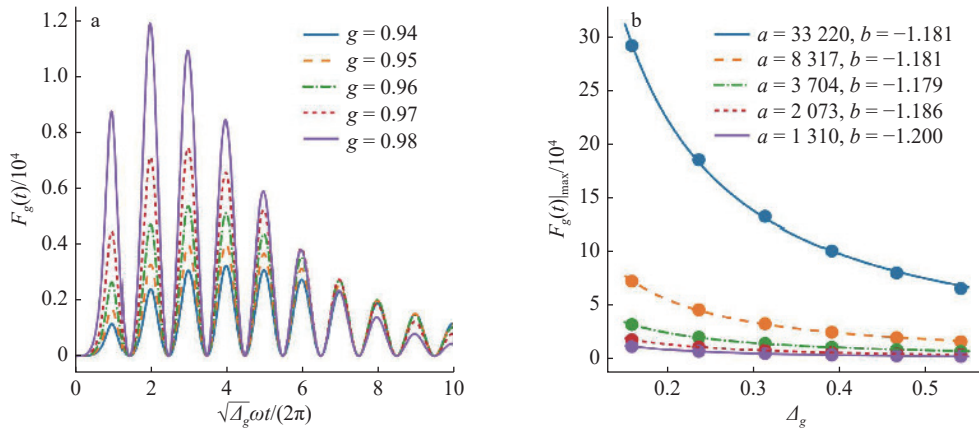


图 3 发生单光子耗散时, 不同耦合强度下 g 方差的倒数 $F_g(t)$ 随时间的演化 (a) 及 $F_g(t)$ 最大值与能隙关系^[15] (b)

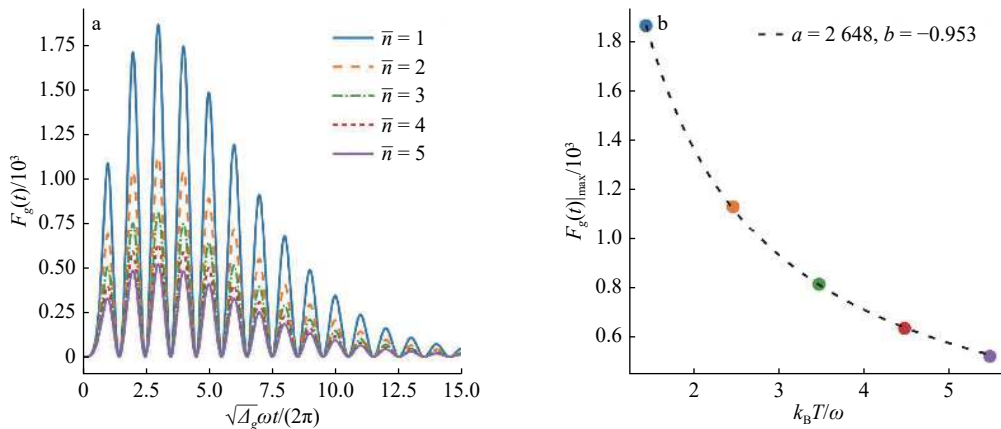


图 4 发生单光子耗散时, 不同温度下 g 方差的倒数 $F_g(t)$ 随时间的演化 (a) 及 $F_g(t)$ 最大值与温度关系^[15] (b)

相变点测量的精度越低. 这点也可以从图 5-a 中找到原因, 对于不同 g , $F_g(t)$ 不再以 $\Delta_g \omega$ 作为频率进行

振荡, 即双光子耗散破坏了体系能谱的等间距结构.

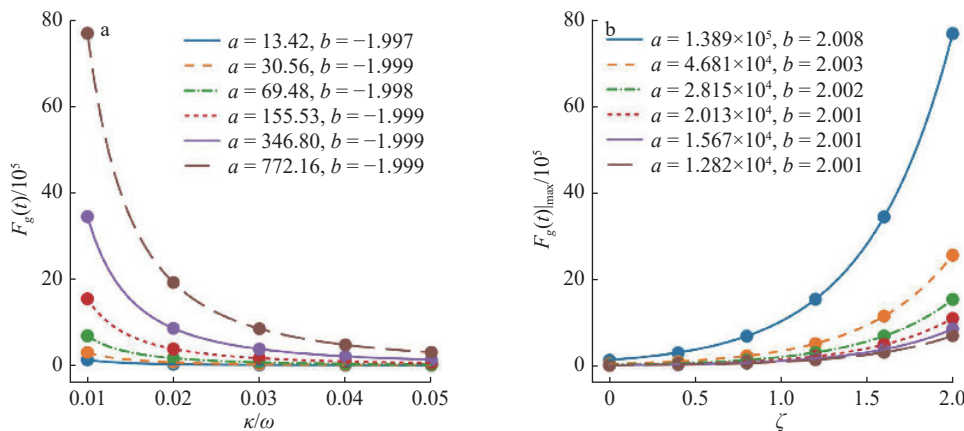


图 5 发生双光子耗散时, 不同耦合强度下 g 方差的倒数 $F_g(t)$ 随时间的演化 (a) 及 $F_g(t)$ 最大值与能隙关系 (b) [15]

4 束缚态与有噪声的海森堡极限

2019 年安钧鸿等发现, 当环境中存在束缚态并进行精密测量时, 可以实现无噪声的海森堡极限. 如图 6 所示, 我们以 Mach-Zehnder 干涉仪为例, 说明其原理. 2 束光从左下方入射, 分别经过上下 2 条光路到达探测器, 在途中 2 个分束器 BS_1 和 BS_2 发生相互作用, 并且上光路相对于下光路会额外产生相位 γt , 此处 γ 即待测物理量. 这个系统是 2 个具有相同频率的单模光场, 它们和一个具有有限带宽的环境发生相

互作用. 其中环境可以用一个截止频率为 ω_c 的欧姆谱(密度)描述. 当 ω_c 较小时, 总系统的能谱是连续谱, 测量 γ 的误差会先减小后增大, 即存在最优测量时间. 当 ω_c 大于某个临界值时, 总系统在连续谱以外会出现一个新的孤立能级, 即束缚态. 此时, 测量 γ 的误差会随时间单调递减, 从而达到无噪声的海森堡极限. 因此, 可以利用束缚态提升量子精密测量的精度. 类似的束缚态在一维耦合腔阵列和二能级原子的相互作用系统中也曾被发现过, 但是没有被提出用于量子精密测量.

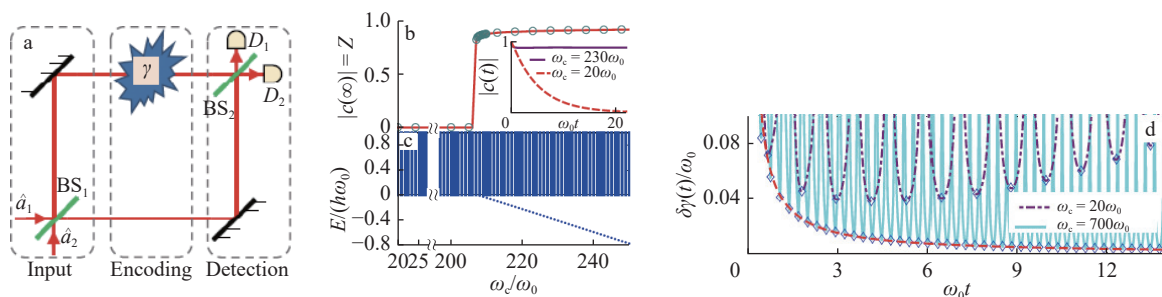


图 6 束缚态与量子精密测量的海森堡极限 Mach-Zehnder 干涉仪 (a), 束缚态概率幅 (b), 总系统的能谱 (c), 测量误差动力学 [11] (d)

2023 年, Bai 等 [20] 基于束缚态和 Floquet 工程方法提出了一种克服精密测量中止步定理的方案, 如图 7 所示. 这里的止步定理是指, 对于独立热库模型而言, 噪声会使得量子精密测量中误差与量子比特数 n 和测量时间 t 的关系不满足式 (10), 而使得精度的提高趋近于一个常数. 通过对 Ramsey 干涉仪的原子进行周期性驱动, 当原子与噪声组成的系统形成 Floquet 束缚态时, 其频率测量的误差将恢复到理想的 t^2 标度关系. 如果结合最优控制方法, 可以同时恢复有噪

声的量子精密测量误差随量子比特数 n 和编码时间 t 的 $n^{-2}t^{-2}$ 标度优势 ($T=nt$).

5 量子模拟

5.1 量子模拟方法 量子模拟是用一种易于操控的量子系统去模拟另一种在现实中难以实现或操控的量子系统, 以获得目标量子系统的物理性质或动力学演化过程 [21]. 本文考虑的量子模拟是基于哈密顿量系综方法, 通过施加经典噪声或者引入辅助量子比特,

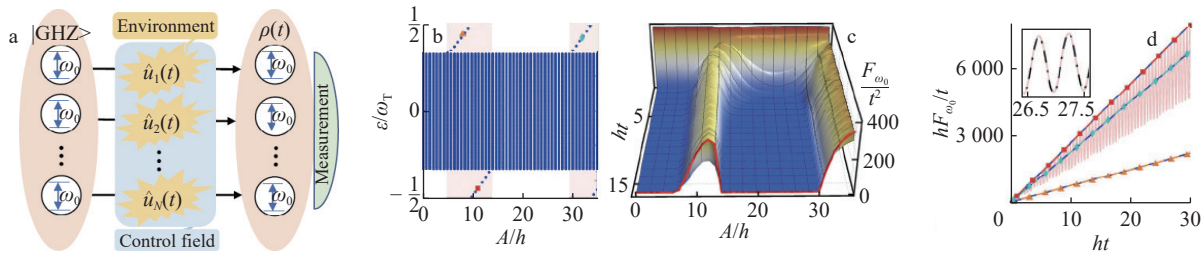


图 7 用束缚态和 Floquet 工程克服量子精密测量的止步定理 Floquet 工程示意(a), 总系统能谱中能带和束缚态与驱动强度 A 关系(b), Fisher 信息动力学与驱动强度 A 关系(c), Fisher 信息与时间关系^[20](d)

来模拟开放量子系统的动力学演化过程. 这种方法一般需要生成大量具有相同初态的样本, 然后在不同哈密顿量 $H_Q = H_{QS} + H_{QN}$ 作用下进行时间演化, 再对系统综取平均得到的密度矩阵符合级联运动方程. 此处, H_{QS} 模拟开放量子系统中 H_S , H_{QN} 模拟环境的作用即 $H_B + H_{SB}$, 其具体形式为

$$H_{QN} = \sum_m \beta_m(t) |m\rangle\langle m|, \quad (20)$$

式中

$$\beta_m(t) = \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_m F(\omega_j) \omega_j \cos(\omega_j t + \varphi_j^{(m)}). \quad (21)$$

式中: α_m 是噪声的幅度; $F(\omega_j)$ 刻画噪声的关联函数形式; $\omega_j = j\omega_0$, ω_0 是基频, $N_c\omega_0$ 是截止频率; $\varphi_j^{(m)}$ 是一组均匀分布在 $[0, 2\pi)$ 的随机数. 噪声的关联函数是 $S_m(t) = \langle \beta_m(t+\tau)\beta_m(t) \rangle$, 即

$$S_m(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T dt \beta_m(t+\tau)\beta_m(t) = \left(\frac{\alpha_m}{2}\right)^2 \cdot \sum_j [F(\omega_j)\omega_j]^2 (e^{i\omega_j\tau} + e^{-i\omega_j\tau}), \quad (22)$$

关联函数与 t 无关, 而只依赖于 τ . 对它做傅里叶变换, 得到噪声的功率谱密度

$$\begin{aligned} \tilde{S}_m(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \beta_m(t+\tau)\beta_m(t) \rangle = \\ &= \pi \frac{\alpha_m^2}{2} \sum_j [F(\omega_j)\omega_j]^2 (\delta(\omega - \omega_j) + \delta(\omega + \omega_j)). \end{aligned} \quad (23)$$

这里模拟噪声效果采用的是热库调控 (bath

engineering) 技术, 最早在离子阱系统中提出并模拟了各种谱密度形式的退相位和弛豫噪声^[22]. 要让模拟的动力学跟目标开放量子系统动力学完全一致, 需要让二者的哈密顿量 H_S 和 H_{QS} , 以及二者的关联函数 $C_m(t)$ 和 $S_m(t)$ 分别相同. 当然, 在实际模拟中, 由于被模拟的开放量子系统和系综的能量尺度不一致, 二者之间一般差一个比例系数, 即

$$\frac{H_S}{H_{QS}} = \frac{C_m(t)}{S_m(t)}. \quad (24)$$

在量子模拟实验中, 实际操作一般分为以下步骤: 1) 通过以上关系找到符合条件的 H_{QS} 和 $S_m(t)$. 因为 $S_m(t)$ 确定, 噪声哈密顿量 H_{QN} 也就确定了. 2) 通过量子-经典杂化版 gradient ascent pulse engineering (GRAPE) 算法, 找到实验中可行的脉冲序列^[23-24], 最后在实验中实现. 我们已经用该算法在核磁共振量子计算机中模拟了光合作用中的能量传输和电荷分离^[16, 25], 验证了我们提出的应该用全局和局域变量度量开放量子系统动力学的非马尔科夫性^[9], 提出并检验了量子精密测量方案的实验可行性, 见图 8、9^[10, 16]. 此外, 通过理论分析, 证明在超导量子计算机中也是切实可行的. 由于噪声环境中的量子精密测量作为一个开放量子系统的实例, 在以超导量子系统和核磁共振系统为代表的量子计算系统中, 应用该量子算法检验量子精密测量理论方案的实验可行性, 应该是切实可行的.

5.2 检验量子精密测量方案 我们的方法对于检验一类量子精密测量方案都有效. 例如, 2019 年兰州大学安钧鸿等^[11] 提出, 当系统与环境相互作用满足特

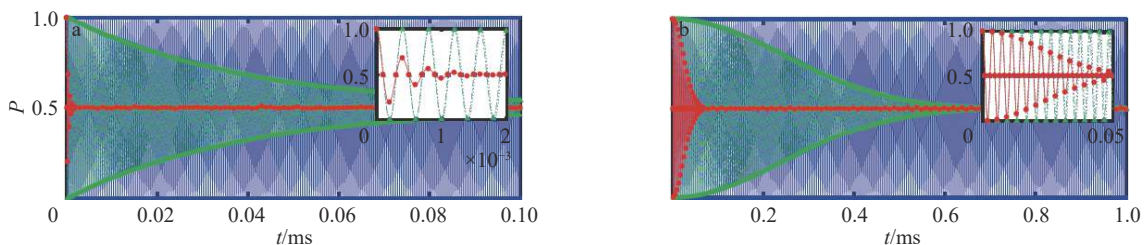


图 8 量子模拟马尔科夫噪声(a)、非马尔科夫噪声(b)中的精密测量^[10]

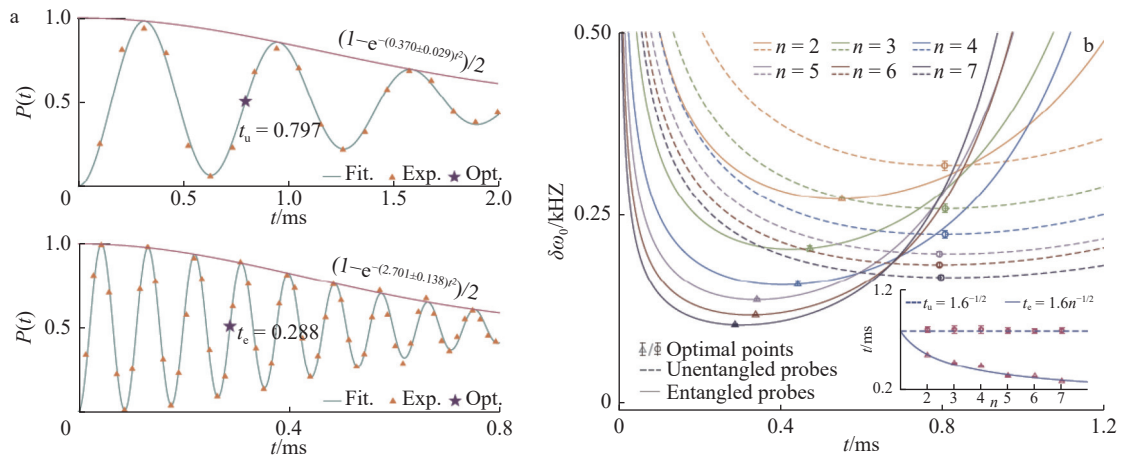


图9 直积态量子动力学(a-上)、GHZ态量子动力学(a-下), 测量误差动力学^[17](b)

定条件, 存在束缚态时, 可以达到无噪声的海森堡极限. 2010年, 我们在研究一维耦合腔阵列与一个二能级原子相互作用时, 通过严格求解开放量子系统动力学发现存在束缚态^[26]. 这个模型在数学上等价于一个二能级系统与一个能带耦合. 因此, 如果我们在量子计算机上构造一个具有相同能谱结构的量子系统, 就可以演示通过束缚态达到量子精密测量的海森堡极限. 当然, 还有其他办法可实现该方案. 如果在量子计算机上对一个量子比特施加纵向弛豫噪声, 其能谱具有一维耦合腔阵列相同的能带结构. 与前一种方法相比较, 后者更节省资源, 但是前者可以模拟耦合腔阵列中丰富的物理现象, 并用于设计量子相干器件, 例如单光子开关、二维单光子量子路由器、单原子超腔、双原子超关联辐射特性和巨原子等.

除了以上方案, 我们的量子模拟方法还可以用于检验量子临界增强的精密测量方案. 2021年, Chu等^[12]提出一种基于量子临界的精密测量的动力学框架. 他们发现, 在量子Rabi模型中, 当发生量子相变时, 体系的等间距能谱的能隙会消失, 此时此刻测量误差的Fisher信息会发散, 从而导致被测量方差趋近于0. 为了模拟该方案, 我们可以在 N 量子比特系统中构造等间距能谱, 当能级间距消失时, 即等效于发生量子临界现象. 为了有效模拟热力学极限, 可以逐渐增大 N , 如果此时测量误差趋近于0, 即方案得证.

6 结论

本文简要回顾了各种复杂系统中的精密测量方案. 对于一般情况, 即马尔科夫噪声, 使用最大纠缠态并不会提高测量精度^[4]. 当环境是非马尔科夫噪声时, 使用最大纠缠态可以达到芝诺极限^[5, 27]. 在离子阱系统中, 由于不同量子比特感受到的噪声之间存在关联, 可以使用辅助量子比特, 并将系统制备在合适

的初态上, 从而达到没有噪声的海森堡极限^[10]. 当开放量子系统存在束缚态时, 令人吃惊的是可以达到没有噪声的海森堡极限^[11]. 对于Rabi模型和LMG模型一类具有等间距能谱的量子临界系统, 当发生单光子耗散时, 趋近于量子相变点, 量子Fisher信息和测量精度会发散^[12]; 当发生双光子耗散时, 量子临界现象反而会增加测量误差^[10].

我们首次提出可以应用量子模拟实验, 检验精密测量方案的可行性^[10]. 并证明最大纠缠态确实可以用量子芝诺效应提高测量精度 $n^{1/4}$ 倍^[17]. 通过构造有结构的热库, 来验证束缚态是否可以达到海森堡极限^[11]; 或者构造具有等间距能谱的量子临界系统, 来展示量子临界增强的精密测量方案. 除了验证精密测量方案, 我们的量子模拟算法, 还可以用来演示一维耦合腔阵列中丰富的物理现象.

7 参考文献

- [1] CAVES C M. Quantum-mechanical noise in an interferometer[J]. *Physical Review D*, 1981, 23(8): 1693
- [2] GIOVANNETTI V, LLOYD S, MACCONE L. Quantum-enhanced measurements: beating the standard quantum limit[J]. *Science*, 2004, 306(5700): 1330
- [3] BREUER H P, PETRUCCIONE F. The theory of open quantum systems[M]. New York: Oxford University Press, 2007
- [4] HUELGA S F, MACCHIAVELLO C, PELLIZZARI T, et al. Improvement of frequency standards with quantum entanglement[J]. *Physical Review Letters*, 1997, 79(20): 3865
- [5] CHIN A W, HUELGA S F, PLENIO M B. Quantum metrology in non-Markovian environments[J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(23): 233601
- [6] AI Q, LI Y, ZHENG H, et al. Quantum anti-Zeno effect

- without rotating wave approximation[J]. *Physical Review A*, 2010, 81(4): 042116
- [7] AI Q, XU D Z, YI S, et al. Quantum anti-Zeno effect without wave function reduction[J]. *Scientific Reports*, 2013, 3: 1752
- [8] HARRINGTON P, MONROE J, MURCH K. Quantum Zeno effects from measurement controlled qubit-bath interactions[J]. *Physical Review Letters*, 2017, 118(24): 240401
- [9] CHEN X Y, ZHANG N N, HE W T, et al. Global correlation and local information flows in controllable non-Markovian open quantum dynamics[J]. *NPJ Quantum Information*, 2022, 8: 22
- [10] HE W T, GUANG H Y, LI Z Y, et al. Quantum metrology with one auxiliary particle in a correlated bath and its quantum simulation[J]. *Physical Review A*, 2021, 104(6): 062429
- [11] BAI K, PENG Z, LUO H G, et al. Retrieving ideal precision in noisy quantum optical metrology[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(4): 040402
- [12] CHU Y M, ZHANG S L, YU B Y, et al. Dynamic framework for criticality-enhanced quantum sensing[J]. *Physical Review Letters*, 2021, 126: 010502
- [13] LEGHTAS Z, TOUZARD S, POP I M, et al. Confining the state of light to a quantum manifold by engineered two-photon loss[J]. *Science*, 2015, 347(6224): 853
- [14] MALEKAKHLAGH M, RODRIGUEZ A W. Quantum Rabi model with two-photon relaxation[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(4): 043601
- [15] HE W T, LU C W, YAO Y X, et al. Criticality-based quantum metrology in the presence of decoherence[J]. *Frontiers of Physics*, 2023, 18(3): 31304
- [16] ZHANG N N, TAO M J, HE W T, et al. Efficient quantum simulation of open quantum dynamics at various Hamiltonians and spectral densities[J]. *Frontiers of Physics*, 2021, 16(5): 51501
- [17] LONG X Y, HE W T, ZHANG N N, et al. Entanglement-enhanced quantum metrology in colored noise by quantum Zeno effect[J]. *Physical Review Letters*, 2022, 129(7): 070502
- [18] TAO M J, ZHANG N N, WEN P Y, et al. Coherent and incoherent theories for photosynthetic energy transfer[J]. *Science Bulletin*, 2020, 65(4): 318
- [19] HWANG M J, PUEBLA R, PLENIO M B. Quantum phase transition and universal dynamics in the Rabi model[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(18): 180404
- [20] BAI S Y, AN J H. Floquet engineering to overcome No-go theorem of noisy quantum metrology[J]. *Physical Review Letters*, 2023, 131(5): 050801
- [21] GEORGESCU I M, ASHHAB S, NORI F. Quantum simulation[J]. *Review of Modern Physics*, 2014, 86(1): 153
- [22] SOARE A, BALL H, HAYES D, et al. Experimental noise filtering by quantum control[J]. *Nature Physics*, 2014, 10(11): 825
- [23] LI J, YANG X D, PENG X H, et al. Hybrid quantum-classical approach to quantum optimal control[J]. *Physical Review Letters*, 2017, 118(15): 150503
- [24] KHANEJA N, REISS T, KEHLET C, et al. Optimal control of coupled spin dynamics: design of NMR pulse sequences by gradient ascent algorithms[J]. *Journal of Magnetic Resonance*, 2005, 172(2): 296
- [25] WANG B X, TAO M J, AI Q, et al. Efficient quantum simulation of photosynthetic light harvesting[J]. *NPJ Quantum Information*, 2018, 4: 52
- [26] AI Q, LIAO J Q. Quantum anti-Zeno effect in artificial quantum systems[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2010, 54(6): 985
- [27] MATSUZAKI Y, BENJAMIN S C, FITZSIMONS J. Magnetic field sensing beyond the standard quantum limit under the effect of decoherence[J]. *Physical Review A*, 2011, 84: 012103

Quantum metrology in different environments and experimental verification by quantum simulation

AI Qing¹⁾ WANG Yangyang^{2, 3)} QIU Jing⁴⁾

(1)The Department of Physics, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China;

2)Shaanxi Engineering Research Center of Controllable Neutron Source, School of Electronic Information, Xijing University, 710123, Xi'an, Shaanxi, China; 3)Shaanxi International Joint Research Center for Applied Technology of Controllable Neutron Source,

School of Electronic Information, Xijing University, 710123, Xi'an, Shaanxi, China;

4)Southwest Institute of Technical Physics, 610041, Chengdu, Sichuan, China)

Abstract Quantum metrology based on quantum entanglement and quantum coherence improves the accuracy of measurements. This paper briefly reviews schemes of quantum metrology in various complex environments, including non-Markovian noise, correlated noise, and two-photon relaxation. The booming development of quantum information allows one to utilize quantum simulation experiments to test the feasibility of various theoretical schemes and demonstrate the rich physical phenomena in different baths.

Keywords quantum metrology; open quantum system; non-Markovian; quantum Zeno effect; quantum phase transition; quantum simulation

【责任编辑: 武 佳】